数学学习与数学思想方法

张志淼 编著



郑州大学出版社

数学学习与数学思想方法

张志淼 编著



郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学习与数学思想方法/张志淼编著.—郑州:郑州大学出版社,2006.6

ISBN 7-81106-327-1

Ⅰ.数… Ⅱ.张… Ⅲ.数学教学-教学研究-高等学校 Ⅳ.01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第064169号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路40号　　邮政编码:450052

出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

河南龙华印务有限公司印制

开本:850 mm×1 168 mm　　1/32

印张:12.375

字数:311 千字　　印数:1~3 100

版次:2006年6月第1版　　印次:2006年6月第1次印刷

书号:ISBN 7-81106-327-1/O·24　定价:25.00元

郑州师范高等专科学校优秀学术著作出版基金资助出版

献　给

——祖父母、父母、亲属、弟妹

——贤哲、恩师、同学、同仁

——祖国、故乡、母校、讲坛

张志森诚上

2006.2

北京师范大学钱佩玲教授题词

数学思想能使人们领悟数学的真谛，懂得数学的价值。数学方法能帮助人们学会数学地思考和解决问题。两者在一起，能把知识的学习和培养能力、发展智力有机地联系起来，这是人们重视数学思想方法的原因所在。

钱佩玲

2006年5月13日

多年来，张志淼同志一直从事数学教学工作教育理论的研究，并积累了许多宝贵的教学经验，取得了比较丰富的理论研究成果。作者结合自己的教学实践经验和在数学教育理论研究方面的深刻体会，博采国内外各个研究学派之长，撰写了《数学学习与数学思想方法》一书。该书从下述几个方面对数学学习与数学思想方法这一专题进行了研究：①学习心理学对数学学习有影响；②学习个体差异；③学习个体学习动机对数学学习的推动作用；④学习理论在数学认知学习中的作用；⑤数学思维与数学思想方法。书中的研究方法、主要观点和所得到的研究结论对同类研究课题有比较重要的学术参考价值，对数学教师搞好数学课教学、学生学习数学这门课程有比较重要的指导意义。

本书的写作是认真的、严谨的，内容的组织安排也是合理的，反映了作者有较强的科研组织能力。

蒋里强
防空兵指挥学院
2006 年 5 月 18 日

张志淼同志一直从事数学教学工作，并坚持对数学教育理论方面的研究，不仅教学经验丰富，而且也取得了比较丰富的相关研究成果。他编写的《数学学习与数学思想的方法》一书，在差异论方面的研究有创新之处。该书的主要观点、研究方法和研究结论对同类课题有较为重要的学术参考价值，为从事数学工作、数学教育的同行及数学爱好者提供了一部较好的参考书。该书史料翔实，文字简练生动，数学论证严谨易懂。这反映了作者有很好的数学基础和素养，具备较强的科研能力。

李雪梅

郑州大学数学系

2006 年 5 月 18 日

内 容 提 要

此书是从数学思想方法和数学学习理论两方面论述的，是数学教育基础书籍。全书分为对数学的认识、数学学习理论、数学思想方法三部分。

此书可供师范院校数学系学生选用，也可供中学数学教学第一线的老师参阅。

代　序

——数学学习方法浅议

张志淼先生在数学教育的岗位上耕耘数十年，他将自己一生对数学学习与数学教学的心得进行梳理与思考，写成了《数学学习与数学思想方法》一书，这是一件十分有意义的工作，也是一件值得庆贺的事情。

学校的根本任务是培养人才。数学是人才的基本素质之一，因此学好数学是广大教师和学生非常关注的事情。做任何事都要讲究方法，方法对头事半功倍，那么学好数学的基本方法是什么呢？

一、循序渐进，打好基础

数学家苏步青说过："我觉得在学习上没有捷径可走，也无秘诀可言，要说有那就是刻苦钻研，扎扎实实打好基础，练好基本功。"对学习者来说，打好基础是根本，高楼大厦平地起，根深才能叶茂。打好基础需要循序渐进，这是学习数学的一个特点，正如数学家王梓坤所说："不论是学习（数学）或研究（数学）都必须循序渐进，每前进一步都必须立脚稳固，这是数学方法中的一个显著特点，其他科学也要循序渐进，不过数学尤为如此。前头没有弄懂，切勿前进，有如登塔，只有一步一上，才能达到光辉顶点。"可见数学家们成功的原因之一，是他们在学习研究过程中是按打好基础、循序渐进的方法进行的。

另一方面，从数学的特点来看，学习数学也必须循序渐进。因为数学的知识结构具有系统性、连贯性、严谨性，数学是理性思维的产物，理性思维必定是事事清楚、步步有据，所以学习数学必须一步一个脚印，循序渐进。那么循序渐进会不会影响学习进度呢？我们认为只要目标明确、方法对头，循序渐进不是慢，而是快。数学家王元说过："学习最怕吃夹生饭。如果前面一些东西学得糊里糊涂，再继续往前学，则一定越学越糊涂……所以不要怕慢，常常起步慢一些，只要学得踏实，后来就会快起来。"

怎样才能打好基础？

1. 在"理解"上下功夫

理解就是用自己的经验与思维去处理新事物，接受新知识，解决新问题，由此来不断完善与构建自己的认知结构。简言之，理解就是人们常常所说的"懂"，就是一种"消化"知识的过程。死记硬背不是理解，那么学习数学怎样才算理解了呢？能够灵活运用数学知识就是理解的一个标志，做习题是检验是否理解的方法之一。例如，你学过"勾股定理"后，如果能用"勾股定理"去解决有关的习题，说明你对"勾股定理"有所理解。理解有一个过程，逐步深入的过程。你用"勾股定理"去做对一道或几道习题，只能说明你对定理有所理解，真正"吃透"、"掌握"，还需要通过以后的学习来逐步加深。

2. 在"熟练"上下功夫

数学家陈景润说过："读书不能满足于懂，而要弄得烂熟。"只有把知识"弄得烂熟"你才能有新的体会与发现；只有"熟读唐诗三百首"，你才能对唐诗有所体会，甚至达到"不会写诗也会吟"。可见学习过程中，"熟"是多么重要。但"熟"不是死记硬背，是在理解的基础上，把知识牢牢地装在自己的头脑中，做到在需要时能呼之欲出，信手拈来。为了达到"熟"，必须反复思考，多问几个"为什么"。多做习题当然也是达到"熟"的方法之一，但需注意，

做习题要有明确的目的,要有针对性,要有选择。偏题、怪题只不过是玩弄一些特殊的技巧而已,无助于加深对数学基本概念和内容的理解,这种无目的地做"题海"的方法不可取。

二、独立思考,勇于探索

学习的过程在某种意义上就是人们认识事物的过程。认识事物有一个从感性到理性的"飞跃"过程,这个"飞跃"是不会自然产生的,也不可能由他人来替代完成。这个过程只能靠自身努力、独立思考来完成。学生的学习不是"海绵吸水",不是教师讲什么,学生就能吸收什么,只有靠刻苦钻研、独立思考才能"吸收"知识。数学家华罗庚说过:"在我们一生里需要充分发挥独立思考能力……独立思考是取得正确认识的必需方法,也是惟一方法。"爱因斯坦也说过:"人们解决世界上所有的问题是用大脑和智慧,而不是搬书本。"这些科学家的至理名言说明科研需要独立思考,同样,学习也需要独立思考。

怎样进行独立思考?

1. 不要轻易问人

陈景润说过:"不要一遇到不会的东西就去问别人,自己不动脑子……要自己先认真地思考一下,这样就可能依靠自己的努力克服其中某些困难,对经过很大努力仍不能解决的问题,再虚心请教别人,这样才能得到更大的帮助和锻炼。"

问别人解决问题或得到问题解答,与自己独立思考后解决问题的效果和影响是不一样的,问别人只能得到表面的、浮浅的认识,独立思考后所得的是深层次的、永恒的认识,因此我们在学习中遇到问题不要轻易问人。首先要靠自己思考,千万不要"吝啬"思考,脑子是越用越灵活的。如果一个问题原本自己可以解决而去问别人,这就失去了一次极好的独立思考的机会了。

问问题也有一个方法问题。请别人在关键的地方点拨一下,然后自己再思考,这样可能会费力一些,但收获也会更大。所以

向人请教不要把问题"问透"。

2. 善于提出问题,敢于提出问题

思维是从问题开始的,头脑中没有问题,就不会去进行思考,所以我们应该经常给自己提出一些问题,这是在学习过程中必须经历的一个十分重要的阶段。南宋朱熹说过:"读书无疑者需有疑……小疑则小进,大疑则大进,疑者悟之始也。"从疑到悟(悟就是理解,明白)就是发现问题、提出问题和解决问题的过程,多疑必须会多思;多思就可以达到多悟。正如爱因斯坦所言:"提出一个问题往往比解决一个问题更重要。"

不懂、不明白不是缺点(充其量是一个弱点),问问题,就是要暴露自己的"不懂",这需要一点勇气,我们要敢于暴露自己不懂的地方,不要怕受到"连这个也不懂"的责备(作为教师千万不要用这种口气来责备学生),责备后不是就懂了吗?不想受责备,不懂装懂就一辈子不懂,就应当受到更大的责备。科学是实事求是的学问,一定要彻底弄懂,不能有半点虚伪,为了彻底地弄懂,我们要不断地问"为什么"。清人郑板桥说过:"读书好问,一问不得,不妨再三问,问一人不得,不妨问数十人,要使疑窦释然,精理迸露。"我们要敢于提出问题,不论提出怎样简单,甚至是幼稚的问题,都不表明你的愚蠢,相反,惟一愚蠢的问题是你不提问题!

三、不迷信书本,自觉争取帮助

王梓坤教授说过:"书,无非是作者一次系统的、有充分准备的长篇发言,其中所讲对的居多,错误也有,读书时反复思考,可以起到消化、吸收、运用和发现问题,跟踪追迹的作用。"这就是说,为了追求对问题的彻底理解,可以与"书本"讨论,在与书本的讨论交流中能激发思维,发现新问题,并能彻底明白。这里重要的是"反复思考",而不是迷信书本。

学习首先要靠自己的努力,所以必须自力更生,必须学会自学,但这不等于不需要帮助,自己努力与争取帮助并不矛盾,不要

轻易问人,不等于不要问别人,我们要争取别人(包括老师、同学)的帮助,有帮助与无帮助对学习者来说,学习的效果是不一样的。一位优秀的导师正如航船的领航者,他可以告诉你哪里有礁石,哪里是航道,能让你的思维不会"触礁"、"沉没";一位优秀的导师有丰富的成功和失败的经验,这些宝贵的经验可以成为你学习的借鉴与指针,使你在学习的道路上少走弯路。所以独立思考与争取帮助不矛盾,独立思考是成功的基础、根本,是内因;争取帮助是成功的条件、外援,是外因。要相信自己能够学好,有帮助可以少走弯路,没有帮助就准备披荆斩棘地前进吧!

王申怀
北京师范大学 数学科学学院

2006年2月15日

前　言

自20世纪末，教育对于现代化的基础作用日渐凸现，要发展经济首先要发展教育，已是国人的共识。为发展教育，数学教育研究应时发轫，并出现了百花齐放的局面。数学教育与数学思想方法成了数学界内外的话题。

基于需要，我赴北京师范大学师从钱佩玲教授、王申怀教授学习数学教育课程。学习其间经老师的教诲、点化愚钝，使我对数学教育和数学思想方法的感受和认识有所深入；北师大周作宇教授、中科院张梅玲教授的讲座，加深了我对教育心理学的理论认识；北师大博士后王恺顺教授亲自为我选定了专业方向——数学教育；学习期间还阅读了大量的相关资料和大家述著，受到极大教益。于是开始萌生将钱佩玲教授、王申怀教授的数学思想方法与张梅玲教授、周作宇教授的心理学结合起来的念头。关于数学教育心理学，1972年在埃克斯特召开的第二届数学教育大会上开始讨论，在德国卡尔鲁斯厄召开的第三届数学教育大会上成立了“国际数学教学心理组织”（Psychology of Mathematical Education简称PME）。因此在国际数学教育方面，我的这个想法已经晚了几十年，而在我国的数学学习心理学研究方面却还是薄弱环节。

关于数学思想方法与心理学结合的合理性是应该研究的：①数学教育与心理学可以合成为“数学教育心理”去研究，那么

“数学思想方法”与“学习理论”也可以结合起来作为一个课题去研究。因为，数学思想方法是数学教育的一个内容；学习理论是研究关于学习性质及其形成的机制的心理学理论，所以它们的结合如同国际数学教育大会将数学教育与心理学结合一样是可以尝试的。②“数学思想方法”与“学习理论”结合有着历史渊源。数学思想方法是数学知识的精髓，是数学的指导思想和普遍使用的方法，是基于数学载体之上的。“学习理论”包含于心理学之中，心理学源于哲学，而数学与哲学自古就是孪生兄弟。那么“数学思想方法”与“学习理论”只不过是数学与哲学结合的其中一部分，它们的结合是顺理成章的。③在教育实践中，借用教育心理学研究数学教育中的许多问题已有先例：如联想主义、行为主义、差异论、同化与顺应理论、强化理论、记忆理论、动机、马斯洛的需要层次论等，对数学教育的心理研究有着潜在或明显影响，有些是有效的、可行的。④心理学中差异论符合当今数学学习个体的状况。⑤动机，在教育实践中发现它与数学学习有强相关。⑥教学实践中较好地运用心理学学习理论，对于学生和数学学习的效果具有显著性等等。因此将“数学思想方法”与“学习理论”结合的研究是有益的。

本书将数学思想方法与数学学习结合在一起进行研究，试图达到以下几个目标：①认识数学思想方法，进而认识数学的内涵和数学的价值，认识数学美，使学生养成良好的学习习惯以及实事求是的创造精神、辩证唯物主义的精神和态度。②认识学习心理理论与数学教育的联系，合理使用数学学习理论为学生的数学学习创设良好的环境。③根据动机理论，引发学生的学习动机，唤起学生学习数学的兴趣与激发学生学习数学的动力，尤其注意

培养学生学习数学的能力。④使学生认识、理解、运用数学思想方法,提高数学学习效果,增强学生的思维品质。⑤给数学教师和数学学习者以启发,抛砖引玉,使其创造出更好的学习方法,促进数学学习。

目前数学教育中运用学习理论的状况出现了一些可喜现象,如关注学习者个体的差异和主体地位、重视学习动机的引发、改进教学方法、建设课堂文化等,并收到良好效益。但也存在一些问题,有待于在发展中不断完善和改进。在这里提倡:有端正的学习态度和借鉴方法,提倡实事求是、理论联系实际的方法,反对形式主义的做法。

此书成书的过程中,曾得到钱佩玲教授、王申怀教授、张美玲教授等的关心,在此表示衷心感谢!特别感谢钱佩玲教授为本书亲笔题词,王申怀教授还屈尊为拙作赐序!感谢蒋里强教授、李雪梅教授对本书的推荐!对那些通过其著作给我以思想的大家学者表示感谢!成书过程中曾受到学校领导的关心和支持以及数学系的同志们的关心和眷顾,在此表示感谢!在成书过程中吴克成、王桂花、李先知、李国富、刘卫岭、赵建功、张秀玲、闫淑霞、陈丽、陈彩云、陈宏道、范中广、赵远、王永洪等教授和老师曾给予宝贵意见,谨此表示感谢!感谢郑州大学陈香才教授和郑州大学出版社吕双喜教授给予的大力支持!

此书涉及学科知识广泛,个人水平有限,文中难免有不妥之处,敬请各位专家给予批评指正!

编者

2006 年 2 月 10 日

目　　录

第一部分　对数学的认识

第二部分　数学学习理论

第三部分　数学思想方法

第一部分　对数学的认识

第一章　数学一瞥

从人类在蒙昧时代的生产和生活中产生的“数觉”到抽象的“数”概念的形成，从远古时代的屈指计数到今天高速计算机的发明和使用，从量地测天到抽象严密的公理化体系，在悠悠五千年的历史长河中，数学伴随着生产、科技的进步而发展．数学的发展又推动着人类文明的进步，数学成了科学史上最富有魅力的角色，成为各个时代人类文明的标志．庞加莱说：“如果我们要预见数学的将来，适当的途径是研究这门学科的历史和现状．”我们认识数学的“适当的途径”也应当从数学的“历史和现状”开始，因为数学发展至今已是十分宏大，因此本章是简要的叙述．

§1 数学史一瞥

一、数学发展流程

1. 数的发展流程

数的发展流程见图 1－1－1.

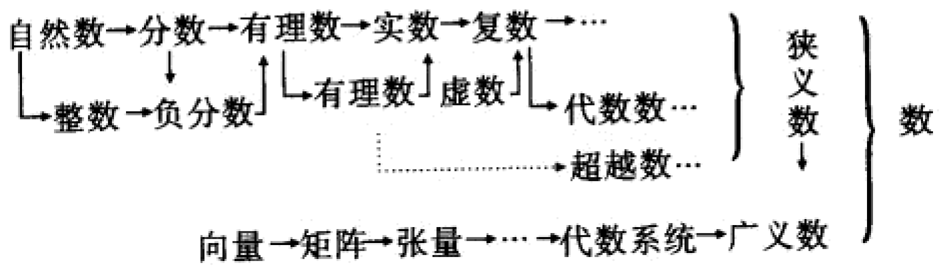


图 1－1－1

2. 数学中心迁移路线

数学中心迁移路线见图 1－1－2.

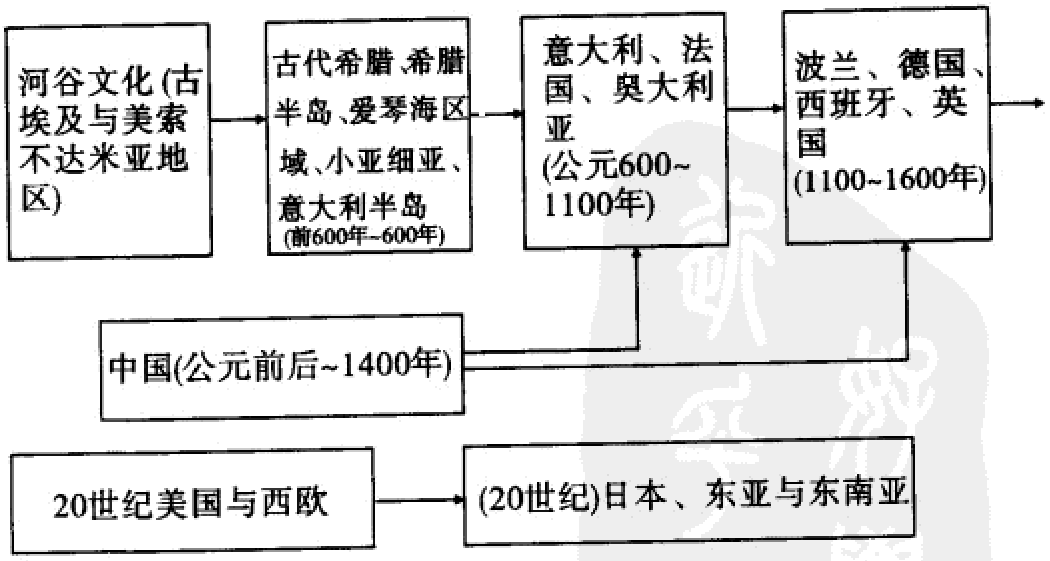


图 1－1－2

3. 数学的发展流程

数学的发展流程见图 1－1－3.

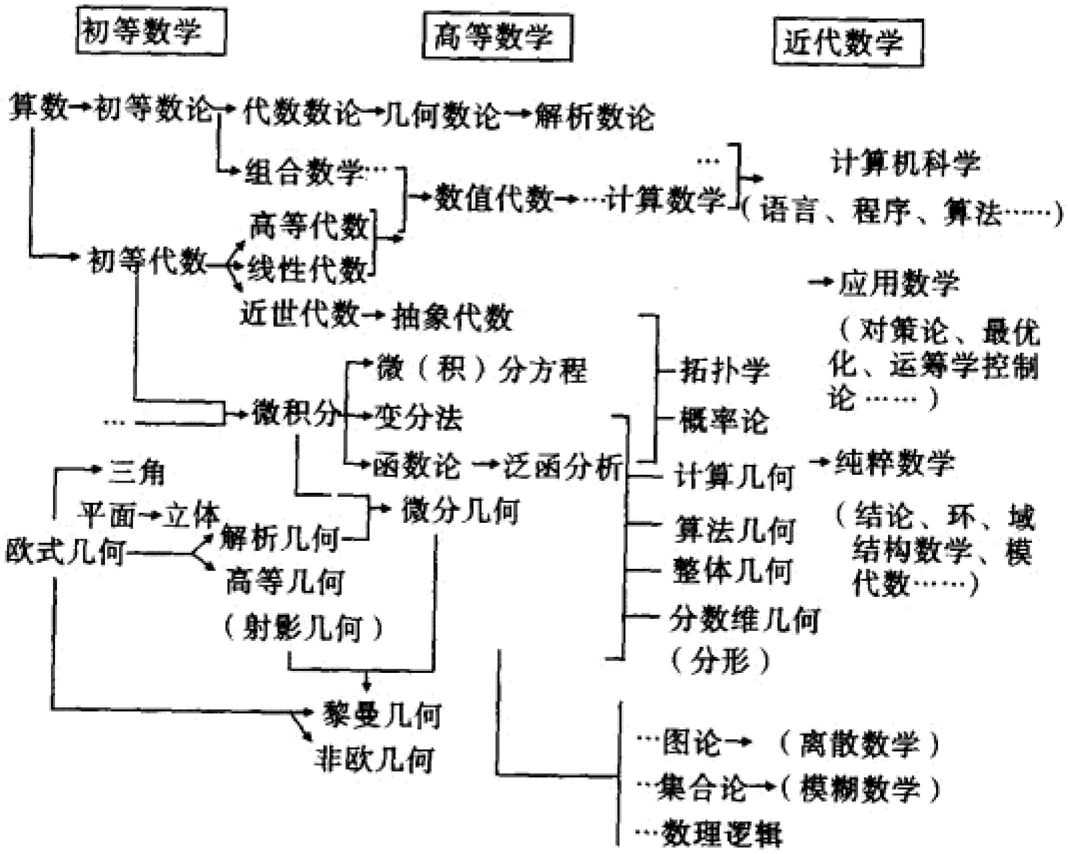


图 1－1－3

二、数学发展的几个重要阶段及与其相关的数学事件

1. 数学的起源和早期发展（公元前 6 世纪以前）

这一阶段是数学的萌芽和数学的早期，有影响的事件和史料如下：

（1）早期的记数系统和数的进位制. 记数系统有中国的甲骨文数字、巴比伦的楔形数字、古埃及的象形文字等，史料有古埃及的纸草书、美索不达米亚的泥板书与中国的甲骨文等.

（2）土地丈量、印度的几何学，与商高定理问世.

(3)整数、分数的运算和对一元一次方程、一元二次方程解法的研究与使用.

2. 初等数学时期(公元前6世纪~公元16世纪)

(1)古代希腊数学(公元前6世纪~6世纪)

1)毕达哥拉斯学派(前580~前500年),是数学史上时间最早,规模最大的学派. 其贡献是:毕达哥拉斯定理及正多面体的作图;黄金分割的深刻研究和运用;无理数的发现等.

2)古希腊的三大几何问题:化圆为方、倍立方和三分角问题的尺规作法. 这3个问题至今尚未解决,并已证"不可能解决".

3)欧几里得(Euclid)与《原本》. 欧几里得是希腊论证几何学的集大成者,他写过不少数学、天文、光学、音乐方面的著作,最重要的是《原本》.《原本》13卷,5条公理、5条公设、119条定义和465个命题,使数学知识系统化、公理化. 公理化发展至今,对数学起了基础性作用. 五大公理、五大公设的几何学叫欧氏几何学.

4)阿基米德(前287~前212年),一生著述颇丰. 他的贡献是面积和体积有关问题计算、穷竭法的发明和平衡法的发明等.

5)芝诺的四大悖论:"二分法"运动不存在悖论、阿基里斯善跑却追不上乌龟悖论、飞矢不动悖论和运动场悖论.

6)阿波罗尼(Apollonius)与《圆锥曲线》问世. 阿波罗是亚历山大时期第三位数学家,其传世之作是《圆锥曲线》,有8卷,含487个命题.

7)托勒玫三角学的建立,并制成了一张弦表.

8)丢番图的不定方程求解与其著作问世.

9)波斯人《数学汇编》的问世.

(2)中世纪的中国数学(前600~1600年)

1)战国诸子百家,对"有穷"与"无穷"概念的提出和认识.

2)《周髀算经》问世:日高公式与勾股定理的证明.

3)《九章算术》问世:在所谓九章"方田、粟米、衰分、少广、商

功、均输、盈不足、方程、勾股”中涉及分数的运算、比例、线性方程组的解法、正负数运算法则、数的开方、面积和体积的计算.

4)刘徽的“割圆术”、“木马术”中极限思想的出现,球的体积公式的推导与证明.

5)祖氏父子对圆周率推算和祖暅原理“幂势既同,其积不容异”的问世,体现数学的论证倾向.

6)算经十书:涉及到余数问题、不定方程的解法与辗转除法等问题.

7)“贾宪”、“杨晖”三角.

(3)欧洲文艺复兴时期(15~16世纪)

1)卡丹在《大法》中对一元三次方程解法和一元四次方程解法的探讨.

2)三角学的问世,对三角学作出完整的论述,并在欧洲传播.

3)由于透视学的兴起,促使射影几何学的诞生.

4)对数的发明和应用.

3. 近代数学时期(17~18世纪),在这个时期产生了高等数学

(1)开普勒三大定律的发现.三大定律开创和推动了应用数学和天体力学的发展,反过来也推动了数学的发展.三大定律是:

· 太阳的行星沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道运行.

· 连接行星与太阳的“矢径”在相等时间内扫过相等面积.

· 行星运行的周期的平方与该轨道的半长轴的立方成正比.

(2)笛卡儿发明了直角坐标系(1619).又叫笛卡儿坐标,使几何学获得新生,从而产生了解析几何——高等数学的三大基础之一,同时产生了坐标系下的函数讨论,产生了“活”的数学.因此笛卡儿坐标的诞生标志着数学进入新的时代.

(3)微积分的发明(17世纪70年代).牛顿和莱布尼茨分别从不同出发点独立而同时地发明了微积分学,微积分学在整个数

学中的地位和作用已为世人所公认.

(4)牛顿的《自然哲学的数学原理》(1687)是推动近代数学的一大动力,是整个自然科学的奠基性巨著. 其中的运动学三大定律和万有引力定律也直接丰富了数学、一般力学和天体力学的研究.

(5)数论的成熟(17 世纪末). 数论是数学中一门特殊学科,它的产生很早,成熟也早,但至今仍然是一门活跃而"年轻"的学科. 发生在 17 世纪末至 18 世纪初的世界三大难题:费马问题、哥德巴赫问题、华林问题,使数论成为一门独立的数学学科. 就以三大难题来说,因其难度和吸引力增强了数学的知名度,从而也推动了数学和科学的发展. 19 世纪末解决了华林问题(希尔伯特),1994 年解决了费马问题(A·怀尔斯),至于哥德巴赫问题,虽已有过很多突破性创造,却仍有所谓"1 +1 问题"至今还没有解决的希望.

(6)微分几何的创立. 由于利用微积分研究曲线的曲率、拐点、渐伸线、渐屈线等而获得的属于微分几何的部分成果. 欧拉是微分几何的奠基人,蒙日使其臻于高峰.

(7)代数方程是 18 世纪的主题. 高斯对代数基本定理证明(断言 n 次代数方程有 n 个根)和代数方程可解性的探讨,莱布尼茨在线性方程组和行列式的理论.

(8)欧拉(1707 ~1783)在 1737 年证明了 e 是无理数. 因他证明了"每一个有理数都能表示成一个有限连分数",但 e 表示的连分数是无限的,因此 e 是无理数. 欧拉和伯努利兄弟进一步推进微积分及应用,使无穷级数的新理论出现,导致函数概念的深化和微积分严格化. 由此常微分方程和偏微分方程等一系列数学分支产生,同时微积分得到发展.

(9)对于费马理论的研究,开启了近代意义的数论.

(10)哥德巴赫猜想和华林问题的提出.

(11)拉格朗日第一个宣布“不可能用根式解四次以上的方程”之后,阿贝尔证明了这个论断.

(12)伽罗瓦(1811~1832)研究了一个 n 次方程的 n 个根.

4. 现代数学时期(1820 年~现在)

(1)现代数学的酝酿时期(1820~1870 年)

1)挪威李(1840~1899)研究了无限变换群(李群).这些群与集合联系起来后,并研究这些对象之间存在类似于加法和乘法那样二元运算的关系,且满足封闭性、结合性等性质.

2)爱尔兰数学家哈密顿(1805~1865)对复数的推广与四元数的出现.四元数是一个不满足乘法和交换率的体系.后来由美国吉布斯和英国亥维赛创立了独立于四元数的三维向量代数和向量分析.

3)布尔代数源于布尔(1815~1864)将数学应用于逻辑的想法.布尔代数作为一种运算建立起来,后来对它作了命题演算和概率演算的解释.

4)高斯研究了 $x^2 \equiv a(\bmod p)$(其中 p 是素数,a 不是 p 的倍数)这种同余方程,再次用另一种方法证明了二次互反律.

5)对欧几里得第五公设的关注.非欧几何的诞生,是由罗巴切夫斯基、波约、高斯奠基的.黎曼(1826~1866)将高斯关于欧氏空间中曲面的内蕴几何,推广为任意空间的内蕴几何——黎曼几何.黎曼几何改变了欧几里得第五公设(过直线外一点能且只能引一条平行直线),创造了合乎逻辑而不合直观的几何.

6)由于非欧几何的出现,繁荣了射影几何,形成了射影几何自己的理论.

(2)现代数学的形成阶段(1870~1940 年)

1)康托尔(1845~1918)集合论的诞生,宣布了现代数学的开端.

2)19 世纪 70 年代产生了极限论,奠定了微积学理论的基础,

刺激了分析学的发展.

3)数学向其他学科渗透:经济学兴起了一门数理经济学. 由于法拉第提出的场概念应用上了数学,使得数学上的马克斯威尔方程被赋予多种形式出现. 由马克斯威尔预言了电磁波存在等等,给科学和技术带来了巨大的推动.

4)1900 年,希尔伯特在国际数学家大会上演讲《数学问题》,就 19 世纪数学研究成果和发展趋势提出 23 个问题:

①康托尔(Cantor)的连续统基数的问题;

②算术公理的相容性;

③两个等底等高的四面体体积相等的问题;

④直线作为两点间的最短距离的问题;

⑤李(Lie)的连续变换群概念,不要定义群的函数的可微性假设;

⑥物理公理的数学处理;

⑦某些数的无理性和超越性;

⑧素数问题(包括黎曼(Riemann)猜想);

⑨任意数域中最一般的互反律的证明;

⑩丢番图(Diophantus)方程可解性的判别;

⑪系数为任意代数数的二次型问题;

⑫阿贝尔(Abel)域上的克罗内克(Kronecker)定理在任意代数有理域上的推广;

⑬证明不可能用仅有两个变量的函数解一般的七次方程;

⑭证明某类完全函数系的有限性;

⑮舒伯特(Schubert)计数演算的严格基础;

⑯代数曲线和曲面的拓扑问题;

⑰正定形式的平方表示式;

⑱由全等多面体构造空间;

⑲正则变分问题的解必定是解析的吗;

⑳一般边值问题；

㉑具有给定单值群的线性微分方程存在性的证明；

㉒通过自守函数使解析关系单值化；

㉓变分法的进一步发展.

5）19 世纪末的数学知识迅猛成长，促成了系列学科分支，使新三高（泛函分析、点集拓扑、近世代数）陆续形成. 另外，微分几何、高等几何、实变函数、复变函数、常微分方程、偏微分方程也成熟起来.

6）在康托尔创立的集合论（1873）之下，人类对实数的认识更加深刻了.

7）在集合论刺激下，产生了数学的寻根热（探索数学的基础），形成了“数学哲学”的三大学派：Brower 为首的直觉主义（主张构造性证明）、希尔伯特为首的形式主义（主张存在性证明）和罗素为首的逻辑主义，他们都企图用自己的观点统揽数学，但都未能实现. 事实上今天的数学则是吸取了各派的优点，综合发展的.

8）正是在寻根热中，先后产生了两个哥德尔不完全定理. 大意是说有些形式系统如果是协调的，则它必是不完全的（边界不分明）. 反之，如果它是完全的，则它必是不协调的（在系统内其结论不可能完全得到证明）. 由此说明数学范畴是没有分明边界的. 从此使得数学寻根热冷静了下来，数学回到了它正常的开发状态.

9）布尔巴金学派，致力于建造数学“象牙塔”，比如“数学结构”观点的提出.

10）特别应提到：20 世纪内纯数学研究与希尔伯特 23 大问题的攻关也是紧密联系着的. 比如有关资料 1936 ~ 1974 年间获菲尔兹奖的 20 人中有 12 人的工作都与希氏问题有关. 又如 1940 ~ 1976 年间美国数学十大成就中即有 3 项属 23 大问题的工作，由

此可见一斑了. 目前23大问题仅解决一半多一点,仍有约1/3的问题仅做了部分工作,有待最终完成,剩下的几个笼统的问题,难以说解决了与否.

(3)当代数学时期(1950~现在)

1)应用数学的新时代开始,其特点:数学的应用突破了传统的范围向人类几乎所有的领域渗透;纯粹数学几乎所有的分支都得到了应用,其中最抽象的分支也参与了渗透;现代数学对生产技术的应用越来越直接;现代数学在向外渗透中产生了一些相对独立的学科. 20世纪的数学呈现出其核心领域越来越抽象、其应用也变得越来越广泛(如数理统计、运筹学、控制论)的现象.

2)数学向物理、生物、经济学的渗透,出现了数学物理、生物数学、数理经济学.

3)电子计算机的诞生、1942年戈德斯坦与工程师莫克莱提出《高级电子管计算装置的使用》报告,在美国领头数学家韦依伦的支持下,批准了这个项目. 1945年底第一台程序控制数字计算机ENIAC宣告竣工. 此后计算机以惊人的速度更新. 计算机的影响为计算数学、纯粹数学的研究等注入了活力. 计算机的不断更新,要借助于数论、代数学、组合数学乃至代数几何许多分支的知识,因此计算机的研制还呼唤着新的数学思想.

4)现代数学成果十例:哥德尔不完全定理(1931);高斯—博内公式的推广(1941~1944年);米尔诺怪球(1956);阿蒂亚—辛格指标定理(1963);孤立子与非线性偏微分方程(1965);四色问题(1976);分形与混沌(1977);有限单群分类(1980);费马大定理的证明(1994);若干著名未决猜想的进展.

§2　数学家论数学

1. 数学的逻辑性

恩格斯说:“数学是现实世界中的空间形式和数量关系.”数学与其他科学相比,最突出的特点是它使用了逻辑关系(卡莱因).数学学科的特性是逻辑性和严谨性.

这是一个可靠的规律,当数学或哲学著作的作者以模糊深奥的话写作时,他是在胡说八道.(——怀特海(1911))

夏尔斯·普罗托伊斯·斯泰因梅茨(1923)还指出“数学是最精密的科学,它的全部结论都能绝对地证明.但所以会如此只是因为数学并不试图得出绝对的结论.所有的数学真理都是相对的、有条件的.”其实,数学家早就认识了数学的逻辑性.在公元前300年托勒密王曾问欧几里得学习几何是否有捷径,欧几里得的回答是:“几何学无王者之道.”

2. 数学的工具性

正是由于逻辑性和公理化方法使数学呈现其工具性的特征.克莱因指出:“从某种意义上说数学实际上已是现代人类思维过程的基础.实际上数学的抽象性,使它获得了其他人类思维活动所不具有的通用性.”狄拉克(《量子力学》1930)写道:“数学是特别适于处理任何种类的抽象概念的工具,在这个领域中它的力量是没有限度的.由于这个原因,一本关于新兴物理的书,只要不是纯粹描述实验的,实质上就必然是数学书.”

譬如无限这个概念,詹姆斯·皮尔庞特在1928年《美国数学协会》的公报中写道:无限这个概念是我们最伟大的朋友;它也是我们心灵平静的最大敌人……维尔斯特拉斯教会我们相信,我们已终于完全驯服了这个难以驾驭的概念.

数学物理学家麦克斯韦也这样赞誉数学方法,在1873年《关

$\alpha_i(i = 1,2,\cdots,m)$——组成 C 的各弧段连接点的内角值；

D——C 所围区域. 此公式也叫高斯—博内公式，在定向闭曲面情形，它变为：

$$\iint_A k\mathrm{d}\sigma = 2\pi X(D).$$

式中

$X(D)$——D 的欧拉示性数，

它等于 1 减去曲面上洞的个数，是通常多面体欧拉数 $v - e + f$（欧拉 1750，其中的 v、e、f 分别为多面体顶点数、棱数和面数）的推广.

二维紧致黎曼流形上的高斯—博内公式是经典微分几何的一个高峰，其后一个世纪内数学家们力图将它推广到高维紧致黎曼流形上去，韦依和阿沦道弗证明了任意黎曼流形上的高斯—博内公式. 高维高斯—博内公式的第一个内蕴证明是由中国数学家陈省身给出的，他 1944 年发表了论文《对闭黎曼流形高斯—博内公式的一个简单的内蕴证明》.

高斯—博内公式将黎曼流形的整体拓扑不变量（欧拉示性数）与它的微分几何不变量（高斯曲率）联系起来，因此具有基本的意义，整体微分几何的许多工作都围绕这一公式展开.

3. **米尔诺怪球**(1956)

拓扑学的一个基本对象是流形，流形的研究与物理应用密切相关. 物理学家感兴趣的不是空的流形，而是所谓微分流形，即可以在其上建立整体一致的微分技巧的流形. 因此，什么样的流形才是微分流形？给定一个微分流形，是否只有一种还是有多种方式赋予它微分结构？这不仅是微分拓扑学的一个基本课题，同时也成为物理学家们关注的问题.

在 20 世纪中期以前，数学家们已经知道所有的一、二、三维流形都是微分流形，而且本质上只有一种微分结构. 一般猜测对高维情形也能证明同样的结论. 但 1956 年，美国数学家米尔诺

庞加莱是这样论数学美和自然美的:“科学家研究自然是因为他爱自然,他之所以爱自然是因为自然是美好的……我们这里所说的美,不是那种激发感观的美,也不是质地美和表现美……我说的是各种组分之间有和谐秩序的深刻美,是人的纯洁心智与所能赏识的美.”由于自然美和数学美的高度和谐,卡尔·维尔斯特拉斯说:一个没有几分诗人才气的数学家永远不会成为一个完全的数学家.

因为数学的美,皮索特·萨与斯基说:“数学是艺术也是科学,它也是一种智力游戏,然而它又是描绘现实世界的一种方式和创造世界的一种力量.”数学也具有一种力量美.

柏拉图赞美数学:“上帝乃几何学家.”

雅可赞美数学:“上帝乃算术学家.”

6. 数学的价值

正因为数学的抽象性、逻辑性、创造性和数学美,使数学在自然科学中居于重要位置,在不同的时代都对数学给予了高度评价.用高斯的话:“数学,科学的皇后……”用毕达哥拉斯的话:“数统治着宇宙.”Joseph Fourier 说:“数学分析与自然界本身同样的广阔.”琼斯在《神秘的宇宙》里说得更明白:“宇宙的伟大建筑师现在开始以纯数学家的面目出现了.”钱佩玲教授说:“数学已成为现代社会的一种文化,数学的观念在众多不同层次上影响着我们的生活方式和工作方式.”数学在生活、生产和学习中,数学无处不在地发挥自己的作用.“也许听起来奇怪,数学的力量在于它规避了一切不必要的思考和它惊人的节省了脑力活动.”(恩斯特·马赫)“数学是科学的大门和钥匙.”(罗格·马康)

数学具有教育功能:数学的贡献在于整个科学技术,尤其是高科技水平的推进和提高,对科技人才的培养和滋润,对全体人民科学思维的提高和人文素质的哺育.

§3　从数学的发展中我们所看到的

1. 数学是抽象的

抽象,一是指从事物中区分出非本质的属性特征和共同本质属性的特征,并抛弃个别非本质的属性特征而抽取出共同的本质属性特征的过程和方法(动词性);二是形容那种偏离具体经验较远,而不太容易理解的对象的一种程度词(形容性),数学中的抽象也如此. 纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系,而不管它的其他性质. 抽象并非数学的独有特性,但数学的抽象是典型的,不仅其概念是抽象的,其方法也是抽象的.

2. 数学理论的演进表现出明显的累积性

数学是不断演进和拓展的,如非欧几何看作欧氏几何的推广,溯源于初等代数的抽象代数并没有为抽象代数所淘汰…… 正如海曼·哈可尔所说:"在大多数学科里,一代人的建筑为下一代人所拆毁,一个人的创造被另一个人所破坏,惟有数学,每一代人都能在旧建筑上增添一层新楼."

3. 数学理论追求最大限度的一般性模式

如纸草书和泥板书的三角形面积为"二分之一高乘底"就具有一般性;微积分的创立也可以看作是寻求一般性无限小的算法…… 正是这种追求一般性模式及公式化的倾向,使得数学具有广泛适用性.

4. 数学逻辑性

数学科学与其他科学除所研究的对象不同外,最突出的特点就是数学对象的内部规律的正确性,必须用逻辑推理的方式来证明. 数学的逻辑推理证明,有着更多形式化的特点,更多地应用形式逻辑和数理逻辑知识. 由于逻辑性,欧几里得说:"几何学无王者之道."真理面前人人平等.

加限制使康托尔集合论中对于经典分析所需要的主要内容得以保留. 任何公理系统都必须解决相容性的问题,但策梅洛—弗兰克尔系统的相容性尚无证明. 因此庞加莱担心:“为了防狼,羊群已经用篱笆圈起来了,但却不知道圈内有没有狼.”尽管如此,集合论的语言和工具性已得到广泛使用.

二、数学基础的三大学派

随着对数学基础的深入探讨,认为寻求类似悖论解决的尝试,应从逻辑上去找问题的根源. 针对集合论,公理化运动假定了——数学运用的逻辑本身的可靠性. 数学家们基于以前形成的不同观点,构成关于数学基础的三大学派.

(1)逻辑主义学派　逻辑主义基于罗素 1903 年发展的《数学的原理》的轮廓. 按照罗素的观点:“数学就是逻辑.”全部数学可以由逻辑推导出来——数学概念可借逻辑确定概念定义,数学定理可以由逻辑公理按逻辑推出. 至于逻辑的展开则依靠公理化方法进行,通过符号演算的形式来建立整个逻辑体系. 为了达到这个目标,为了避免悖论,还创造了一套“类型论”,其代表人物是罗素.

(2)直觉主义学派　直觉主义对于数学基础采取了与逻辑主义对立的观点,其中杰罗内克、庞加莱是直觉主义的先驱,布劳威尔是创始人. 直觉主义的基本思想:数学独立于逻辑,数学基础是一种能使人认识“知觉单位”1 以及自然数列的知觉. 坚持以数学对象的“构造性”定义作为直觉主义的精粹,直觉主义关于有限的可创造性的主张造成了对古典数学中普遍接受的“排中律”的否定. 直觉主义者认为,排中律仅存在于有限集合中,对无穷集合不能使用.

(3)形式主义学派　形式主义纲领的主张是:使数学成为彻底形式化的一个系统. 在这个形式系统中,人们必须以逻辑的方

5. 高隆昌. 数学及其认识. 北京:高等教育出版社,2005

6. 吴振奎,吴昊编著. 数学的创造. 上海:上海世纪出版集团,上海教育出版社,2003

7. 王元明. 数学是什么. 南京:东南大学出版社,2003

8. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

9. [美]李学数. 数学和数学家的故事. 北京:北京新华出版社,1999

10. 周春荔,张景斌. 数学学科教育学. 北京:首都师范大学出版社,2003

11. 顾泠沅,易凌峰,聂必凯. 寻找中间地带. 上海:上海世纪出版集团,上海教育出版社,2009

12. 张奠宙,宋乃庆主编. 数学教育概论. 北京:高等教育出版社,2004

第二章　数学的基本特征

数学由远古的“数觉”到如今,已成为一株枝叶繁茂的大树,已经拥有60个大分支和400个小分支的宏大系统,并且仍然在发展着. 本章仅简单认识一下数学的几个基本特征.

§1　集合——数学中的基本对象

高中教材中的代数部分,自1984年起编入集合. 之所以如此,只因为集合是达到现代数学统一性运用的统一语言,它已是现代数学的基础.

一、集合理论的由来

在分析严格化的过程中,康托尔(1845～1918)创造了集论或类论. 集论创立之后成了争论的论题. 在争论中,康托尔使数学中的“无穷”问题得到确立. 这样,“芝诺关心过的3个问题……也就是无穷小、无穷和连续问题,康托尔解决了它们,他的解答可能就是这个时代最值得夸耀的伟大成就.”集合论是康托尔最伟大的功绩. 从此集合在现代数学思想中被称为“数学的基本对象”,“是现代数学的奠基石”.

集合概念产生以来对数学的功绩:

第一，康托尔对有理数可数性的证明和实数的不可数性的发现，为建立超穷集集合论迈出有意义的一步；数学对数轴的认识产生本质的突破.

第二，由集合论产生的连续统假设、选择公理、ZFC 公理等，构成数字的一个"魔鬼三角"，引发了罗素悖论等一系列悖论，带来第三次数学危机，推动了"数学寻根"热潮.

第三，现代数学中，集合术语得到广泛应用.

二、集合与中学数学

1. 集合的语言和运算

中学数学中已编有集合内容，因此，在下面介绍一下集合论的有关内容.

(1) 用集合表示概念、公式等数学内容时，一般有 3 种方式：

列举法——揭示概念外延的方式，将集合中的元素一一列举出来. 例如 $A = \{1,3,5,7,9\}$.

描述法——揭示概念内涵的方式，即指出集合元素所满足的条件（A 中元素所共有的特征性质 $\alpha \Leftrightarrow A$ 中每一元素具有性质 α，具有性质 α 的元素在 A 中），例如上述集合 $A = \{n \in \mathbf{N}: n$ 为不超过 9 的奇数$\}$.

图像法——用韦恩图表示或作图像表示.

(2) 集合的 3 个性质：元素的互异性，元素的无序性，元素的确定性.

(3) 集合论中的动词：元素与集合的关系是"属于"（用 $\in$ 表示），由它出发可以定义"不属于"（用 $\notin$ 表示）. 集合与集合的关系是"包含于"（用 $\subseteq$ 表示）、相等（用 $=$ 表示）.

(4) 几个逻辑中的词语："或"、"且"、"非"是逻辑中的词语，将其用来描述集合元素及集合与集合之间的关系，可以定义集合中的运算如并（$\cup$）、交（$\cap$）和补，从而建立集合论的基本运算.

(5)集合的运算法则：一般来说确定集合以后，再通过 $=$、$\cup$、$\cap$、$\setminus$等关系就能用集合论的语言来表示相应的数学内容了.

关于集合的运算，有以下基本运算规则(A、B、C 都是集)：

1)幂等律　$A\cup A=A, A\cap A=A.$

2)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A.$

3)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

4)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

5)吸收律　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A.$

6)对合律　$C/(C/A)=A.$

7)对偶律　$C/(A\cup B)=(C/A)\cap(C/B),$

$C/(A\cap B)=(C/A)\cup(C/B).$

8)余补律　$A\cup(C/A)=I, A\cap(C/A)=\Phi.$

关于补集符号有多种，若 $A\subseteq B$，在 B 中 A 的补集可表示为：B/A 或 $\bar{A}$ 或 A^B 或$\complement_B A$

2. 集合的幂集

经常需要将某个集合分割成一些子集来研究问题.

按规定，空集 Φ 是任一集合的子集，又任何一个集可看成自己的子集，因此对一个非空集来说，至少有两个子集.

$X=\{a\}$有两个子集：Φ, $\{a\}$.

$X=\{a,b\}$有 4 个子集：Φ, $\{a,b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$;

$X=\{a,b,c\}$有 8 个子集：Φ, $\{a,b,c,\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$.

一般地，我们有以下定义：

定义 1-2-1　由集合 X 的一切子集组成的集合叫做 X 的幂集，记为 $P_{(X)}$，即 $P_{(X)}=\{A:A\subset X\}$.

如集合$\{a,b\}$的所有子集是：Φ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$，它的子集

个数有 2^2 个,所以它的幂集为:$\{\Phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

由归纳可得,若集合 X 有 n 个元素,则其幂集 $P_{(X)}$ 有 2^n 个元素,证明如下:

所含不同元的个数为 0 的相异子集有 C_n^0(个);

所含不同元的个数为 1 的相异子集有 C_n^1(个);

所含不同元的个数为 2 的相异子集有 C_n^2(个);

所含不同元的个数为 k 的相异子集有 C_n^k(个)$(0\leqslant k\leqslant n)$.

上述子集都互不相同,所以 X 的所有相异子集个数为:

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$(个).

三、集合的势

1. 有限集和无限集

定义 1-2-2 含有限个元素的集(或能与 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ $n\in\mathbf{N}$,建立一一对应的集)称为**有限集**,而把能与真子集建立一一对应的集叫做**无限集**(或无穷集).

中学课本中对无限集的定义是:"含有无限个元素的集",也有的书定义为:一个非空集合,若不是有限集,就称为无限集,这样的定义都没有揭示无限集的本质特征——能与其某一真子集建立一一对应的关系,根据中学生的认知特点,中学课本中的定义方式是可以理解的,但教师可以在允许的情况下,尽可能地揭示无限集的本质特征.

定义 1-2-3 若在集合 X 和 Y 间存在一个一一对应,则称集合 X 与 Y **对等**,记作 $X\sim Y$(或 $\mathrm{card}(X)=\mathrm{card}(Y)$)

不难验证,对等关系是一等价关系. 等价关系可将一切集合进行分类,我们把彼此对等的集在同一类,给予一个标志,称之为**势**(或基数),记作 $\overline{\overline{X}}=\mu$ 或 $\mathrm{card}(X)=\mu$

因此,有限集的势即为其所含元素的数目($A=\{a,b,c\}\sim$

$\{1,2,3\}$, $\text{card}(A)=3$)；无限集的势是有限集元素数目的推广；规定空集的势为 0.

例(1-2-1)　$(-1,1)\sim(-\infty,+\infty)$.

证明：因为 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

是从 $(-1,1)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 的一个一一映射.

关于这样的例子还有许多. 由例子的结果可知，直线上的任一个开线段(不包括端点的线段)所含的元素与直线所含的元素一样多.

2. 两个集合对等的常用定理

定理 1-2-1　设 A、B 为两个集合，若存在 $A_1\subset A$，使 $A_1\sim B$，且存在 $B_1\subset B$，使 $B_1\sim A$，则 $A\sim B$.

证明可参看"实变函数"教材.

例(1-2-2)　$[a,b]\sim(-\infty,+\infty)$.

证明：$[a,b]\sim[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$，

且 $(-\infty,+\infty)\sim(a,b)\subset[a,b]$.

由定理 1-2-1 即得 $[a,b]\sim(-\infty,+\infty)$.

类似地可得 $(a,b)\sim(-\infty,+\infty)$. 因此，直线上任意一种区间与直线的元素一样"多".

人们对无穷集的认识经历了一个漫长的历史过程，自古希腊时代以来，这种集合就引起数学家和哲学家的注意，整个中世纪关于是否有实实在在无穷多个元素的集合这个问题，观点不一，各执一端.

如亚里士多德(Aristotle，公元前 384～约公元前 322)曾考虑过这种集合，但他不承认一个无穷集合可以作为一个确定的整体而存在.

又如：两个同心圆上的点可以建立一一对应，但一个圆周与另一个圆周的长是不等的.

再如：两个不等长的线段上的点可以建立一一对应，从而可以想象它们有同样多的点.

高斯(1777～1855)于1831年给舒曼歇尔的信中说："我反对把无穷量当作一个实体，这在数学中是从来不允许的."

柯西(1789～1857)也不承认无穷集合的存在，在他看来部分能与整体建立一一对应这件事是矛盾的.

有关方面的争论仍无休止，直到19世纪，面对数学分析中建立严密的理论问题时，关于无穷集合的许多问题再也避不开了，布尔查诺维护了实在无穷集的存在，并且强调了两个集合等价的概念(即两个集合的元素间存在一一对应关系). 19世纪70年代初，康托尔(1845～1918)给出了实无穷集的概念：如果一个集合能和它的一部分建立一一对应，它就是无穷集.

综上可知，人们对无限集的认识经历了漫长而艰难的过程，这也正是无限集概念成为教学中难点的原因所在.

3. **可列集与不可列集**

"势"的概念告诉我们，无限集的元素"个数"也不尽相同，势也可比较大小，且势没有最大者. 为此，我们先来看几个较为熟悉的无限集.

定义 1－2－4 与自然数集对等的集称为**可列集**(或可数集). 其势记为$\overline{\overline{\mathbf{N}}}=\aleph_0$.

例如：偶数集、奇数集、整数集都是可列集，集合$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\}$也是可列集.

有理数集$\mathbf{Q}$也是可列集. 事实上，我们将非零有理数用既约分数表示为$\frac{q}{p}(p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{Z}/\{0\})$，记$m=p+|q|$，称之为模，并记有理数0的模为1，则全体有理数可按模的大小不重不漏地排成一列，也即与$\mathbf{N}$建立了一一对应.

可以证明可列集有以下运算性质：

(1)若$A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$为可列集，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$和$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$均为可列集.

(2)若$A_i(i=1,2,\cdots,n)$为可列集，则它们的卡氏积$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$为可列集.

凡可列集，它们的元素一样"多".

应注意的是并非无限集均为可列集. 例如我们可以证明以下结果：

定理 1－2－2　闭区间[0,1]为不可列集.

证明：若[0,1]为可列集则其全体元素可排成一列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$$

将[0,1]三等分，得到三个闭区间如图1－2－1，其中至少有一个闭区间不含a_1，用I_1表示这个闭区间(若有两个闭区间均不含a_1，不妨取左边那个为I_1). 再将I_1三等分，得到三个闭区间，至少有一个不含a_2，记之为I_2. 如此下去，得到一个闭区间列

$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$

满足条件：

(1)$a_n\notin I_n(n=1,2\cdots)$;

(2)I_n的长度为$\frac{1}{3^n}$,

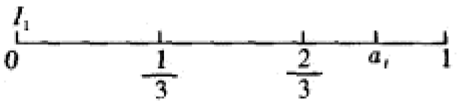


图1－2－1

即$|I_n|=\frac{1}{3^n},\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$. 由闭区间套定理知，必有$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$，且显然有$\xi\in[0,1]$，而$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$说明$\xi\neq a_n(n=1,2\cdots\cdots)$，此与假设矛盾.

定义 1－2－5　与[0,1]对等的集称为具连续统势的集，其势记为$\overline{\overline{[0,1]}}=\aleph$.

直线上任一种区间与直线一样，都是具连续统势的集，它们的元素一样"多"，为了进一步比较势的大小，我们从势的概念和

对等概念出发定义势的大小：

定义 1-2-6 设集 A 的势为 α，集 B 的势为 β，即 $\overline{\overline{A}} = \alpha, \overline{\overline{B}} = \beta$. 若 A 不对等于 B，但存在 B 的子集 B_1 与 A 对等，则说集 A 的势小于集 B 的势（或说集 B 的势大于集 A 的势），记作 $\alpha < \beta$（或 $\beta > \alpha$）.

因此可得：$0 < n < \aleph_0 < \aleph$.

自然会想，有没有比 $\aleph$ 大的势？即有没有一个无穷集，其所含元素比区间（或实数集）所含元素更“多”？答案是不仅有，而且势没有最大者，对此，我们有以下结果：

定理 2-2-3 设 $\overline{\overline{A}} = \mu, \overline{\overline{P(A)}} = 2^{\mu}$，则 $2^{\mu} > \mu$.

证明：记

$$M = \{\{x\} : x \in A\},$$

则 $A \sim M \subset P(A)$.

所以 $\mu \leqslant 2^{\mu}$.

下证“ = ”不成立，即 $P(A)$ 与 A 不对等，若不然，则 $\exists f: A \to P(A)$ 为一一映射，作集合

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

则 $B \subset A, B \in P(A)$，且因假设 $A \sim P(A)$，所以对于 $B \in P(A)$，必有 $y \in A$ 使 $f(y) = B$，分析 y 与 B 的关系：

(1)若 $y \in B$，则由 B 的定义，$y \notin f(y) = B$，矛盾！

(2)若 $y \notin B$，则由 B 的定义，$y \in f(y) = B$，矛盾！

因此不能存在 A 到 $P(A)$ 的一一映射.

所以 $2^{\mu} > \mu$ 成立.

由上定理可知，我们总可从某一集 A 出发，构造其幂集 $P(A)$，幂集 $P(A)$ 的势大于 A 的势，因此势没有最大者. 此外还可证明势具有三岐性.

四、集合元素的抽象性

在说集合元素的抽象特征之前，先谈一下经典数学的抽象和

现代数学的抽象.

1. 经典数学的抽象

数学的抽象性是公认的,因为数学中的“数”总是从客观实际中抽象而来的,不是平移过来.具体地说,数学研究的对象,总的可叫做模型(或问题),数学模型的抽象性可分为三种:

——狭义的应用问题,在数学正规内容中很少,常以例题出现,比如物理学问题、工程学问题等.当然作为数量问题,已经是对非数的实际对象的一种抽象了,这是一种初级的抽象.

——在统计学中常常用百分比来考察,如概率、数值、模糊值都是这类问题.

——比上两种抽象还要抽象的是正统数学所研究的问题.它的模型的抽象形式更高于数理模型或形式化的抽象形式.其结论一般是公式定理,因此具有应用的广泛性.

2. 现代数学中元素的抽象性特征

现代数学已大大超越了数的概念.数量(数字)扩展为变量(字母)、函数,而且这些量是一般的对象.比如,“群”的定义中的元素是泛指的,既可以指函数、矩阵,也可以作别的对象.拓扑空间的元素也不一定是坐标系下(量化了的)的几何对象.特别是几何学中的元素不一定是点、线、面,而是抽象的对象.只要满足希尔伯特的公理体系即可.

3. 集合概念的抽象性特征

现代数学是在数学一般性(数)的基础上的进一步抽象,那么集合概念的运用正好符合现代数学抽象性特征.

这是因为从集合的定义(尽管未统一,但都承认)“若干元素构成的整体”这点可见“集合”、“元素”都是泛指,或说是抽象的,因而除了数以外,还可以用到任何对象上.在数学中用到的集合常常是赋予公理限制的“特殊集合”.但不管怎样,集合的最为典型的“抽象性”却是始终保持着的.

4. **直接积(笛卡儿积)**

(1)**定义 1-2-7** 假定 $A=\{x_h \mid h\in H\}$,$B=\{y_k \mid k\in K\}$,那么$\{(x_h,y_k) \mid x_h\in A, y_k\in B\}$是一个集,它称为 A 和 B 的**直接积**,记作 $A\times B$.

直接积存在是替换公理与并集公理的结论. 这里先介绍替换公理和并集公理.

替换公理:假定 X 是一个集,如果以每个 $x\in X$ 作为第一坐标,都有一个且只有一个 y 与 x 结成有序数对(x,y),那么所有这种有序数对的第二坐标 y 的全体是一个集 Y.

并集与并集公理:假定$\{A_h \mid h\in H\mid\}$是一个集族,那么$\{x \mid$ 存在一个 $x\in A_h\}$是一个集,它称为这族集的并集,记作$\bigcup\limits_{h\in H} A_h$.

由直接积的理论,因为对任何 $h\in H$ 与 $k\in K$,$\{(x_h,y_k)\}$是一个集,由替换公理$\{\{(x_h,y_k)\} \mid h\in H\}$是一个集族,因为存在并集 $C_k=\bigcup\limits_{h\in H}\{(x_h,y_k)\}$、$\{C_k \mid k\in K\}$又是一个集族,所以又存在并集$\bigcup\limits_{k\in K} C_k$,这就是 $A\times B$.

(2)假定$\{A_h|h\in H\}$是一集族,其中每个 $A_H\neq\Phi$,那于由选择公理(一个集一定可以依一个次序排队),对每个 $h\in H$ 可以得到一个 $x_h\in A_h$,并由替换公理得到一个集,$(x_h|h\in H)=\{\{x_h,h\}|h\in H\}$称为由一个选择变换得到的有序组.

把每个 $x_h\in A_h$ 换为一个 $x'_h\in A_h$,那么由替换公理得到另一集$(x'_h|h\in H)=\{\{x',h\}|h'\in H\}$,这同样可以看作由一个选择交换得到的有序组.

所有这些有序组的全体是集,它称为一族集 $A_h(h\in H)$的直接积,记作$\mathop{\times}\limits_{h\in H} A_h$.

$$H=2\text{ 时 }\quad \mathop{\times}\limits_{h\in H} A_h\text{ 就是 } A\times B.$$

§2　数学的基本关系

数学不管是从它的总体,还是这门学科,都具有高度的系统性,而这些系统性是通过"关系"体现出来的. 因而"关系"显然是数学的重要特征,如果没有了关系,数学仅仅是散乱堆垒起来的"数",就没有"科学"可言了;如果有了关系,数学就形成了系统(或体系),关系对数学成为一种科学是必要的.

再者,数学不仅仅在于"维持"它的既有关系,更重要的它具有创造性和开发性. 利用关系,从已知到未知,从有限到无限,从旧关系到新关系,使得数学更完美、更复杂、更高级、更活跃.

一、序关系

序关系本是实数的基本关系,更是有理数的基本关系,因而成为数学中最古典的关系. 但发展至今它仍然是现代数学中最为基本的二元关系之一,这就是 $=$、$>$、$<$ 所表示的序关系,不过正因为它很重要,今天已被发展、推广成多种形式的序关系和公理化的序数理论等,现简述于下.

1. 集合间的序关系

就是包含、被包含和相等关系.

2. 在逻辑学中的推广

此即"$\Rightarrow$",表因果关系,自然也是序关系.

3. 用序关系来描述集合的特征

关于序空间概念和序数概念. 例如:

定义(序空间)1-2-8　对集合 X,设 $\leqslant$ 为其上二元(正元与负元)关系,若有 $a,b,c\in X$,满足三公理,

①自反性: $\forall a\in X, a\leqslant a$;

②反对称性:若 $a\leqslant b, b\leqslant a$,则 $a=b$;

③传递性：若 $a \leqslant b, b \leqslant c$，则 $a \leqslant c$.

则叫 $\leqslant$ 为 X 上序关系，称 $\{X, \leqslant\}$ 为序空间，称 X 为**偏序集**，若 $\forall a, b \in X$ 都有序关系，则 X 叫做**全序集**，比如除了大小关系、整除关系外，事物集中的相等关系、包含关系等等皆满足序空间三公理.

4. 把"="关系推广成"等价关系"

把集合 X 满足自反、对称、传递的所谓"等价三公理"的二元关系都叫做等价关系.

5. 格也是赋予了特殊序关系的代数集合

6. 泛函映射

设 X 是一个集合，则泛函映射 F 是，$F: X \to \mathbf{R}$（实数集），其思想是，为了把纷繁、复杂的对象集变成可比较大小的"全序集"，人们采取了一些手段使之变成一个个的标量，也就是把它们都映射到实轴上去，即可达到目的，这里"手段"可以是一些简单的标量函数. 数学上常用的对向量作加权平均、对向量求模、对矩阵求行列式、对函数求定积分等等也都是一种泛函映射，所以我们可把这一类映 X 入 $\mathbf{R}$ 映射，统称做泛函映射.

7. 序关系可直接引申到应用学科

例如，经济学上的偏好关系㊂、⧀、⧁或 ⩽⃝即属序关系的引申，在其他相关专业中也可以举出（或创出）更多类似的引申例来.

二、运算关系

不管是初等数学还是现代数学都少不了运算，不过随着历史的进展其运算概念也在推广，运算方法也在增加. 现将运算方法略述于下.

1. 数学的基本运算方法

(1)基本的运算:加“+”,乘“·” 加乘运算是整个数学中最基本、最普遍的运算方式.代数学作为研究加乘这一基本运算规律的科学,由于加乘运算的普遍性,使得代数学更具重要性和在其他学科应用的广泛性.关于加乘运算是如何进行和运用的,从近世代数学中可以知道.

(2)数量性运算方法 数量性运算指加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数等运算,简称“八则”运算,它源于古典数学的运算,经推广成为表示数字的字母在相应条件下的运算,以及表示数量的函数式(在相应条件下)的运算.

(3)微积分运算 基于微积分运算的普及性和完美、简易性,数学界赞誉为如今“已经算术化了”,的确可以说在微积分学诞生以来的所有数学分支中,没有哪一个的特有运算方法在这些特征上超过它,所以这里将其归入基本运算方法之列.加上上述“八则”运算,统一叫做“十则”运算.

此外,现代数学中常常接触到的算子概念,其实也是一种映射,只是算子是指(抽象)空间到空间(包括到自身)的映射.

总之,我们从应用范畴来看,函数和映射间可以说一个是狭义的,一个是广义的.

2. 数学的基本运算形式

数学的基本运算形式就是等式和不等式形式.从空间来说,前者是降维的,后者是保维的;从特征上说,前者表恒等运算过程,后者表保序运算过程.它们都可用于数量和模量(函数),但对于非数量性的对象(事物),则属其推广形式.比如对于$\leqslant$或“$>$”抑或“$\Rightarrow$”等关系下的运算,常常需要根据具体对象,补充一些运算规则方可实行.这要根据实际情况灵活处理,只要掌握了基本思想,剩下的就是自己体现创造性的余地了.

3. **运算方法的推广**

这种推广主要是以对“+”,“·”两个最基本运算方法的推广,例如推广成⊕、⊗、∨、∧或∩、∪等.

4. **数理逻辑运算**

数理逻辑是数学的一个分支学科,它用一套固定的符号(包括连词、变词、括号、关系等符号)及公式等几个公理组,构成自己的独立运算体系,这也是数学基本运算的一种推广. 作为数理逻辑学来说,即是其基本运算.

三、映射关系

1. **概念认识**

映射是数学中最为基本、普遍的一个概念,不过“映射”的定义属描述性的. 事实上映射是一类因果演化方式的形象描述,一般形式可表为 $\varphi: X\to Y(x\to y = \varphi(x))$. 这里“因果演化”表明:集合 X 中的元素 x(因)按确定的方式(或叫规则)φ 转化为集合 Y 中的元素 y(果). 显然这里的因果演化与一个定理的因果推演(证明)是不同的,所以映射只能作为“一类”因果演化.

也可以把数学定义视为研究映射关系和映射变换下的不变量和不变性的科学,由此可见“映射”在数学中的基础地位了. 因此,高中课本也引入了映射的概念.

2. **映射与函数**

一般情况下,把映射概念与函数概念等同是不算错的,但是细究起来,它们的含义也并非完全等同,说它们有较大共通性较确切些. 在学习中,对于似乎相似的概念应尽量寻找它们的区别和共同点. 现在来讨论映射与函数的区别.

(1)含义上的差异　如果把 $\varphi: X\to Y$ 示意成图 1-2-2,则可见,如果把 φ 视作映射,一般是强调在 φ 下 X 集与 Y 集间直接的因果关系. 比如拓扑学中的“连通定理”是说,$\varphi: X\to Y$ 是连续映

射，X 是连通空间，则 $\varphi(X)\subset Y$ 也是连通空间. 但把 φ 说成函数时，习惯上常常在于强调其表达式，也就是这时比较强调图空间（图 1－2－2 中乘积空间 $ABCD = X\times Y$）中的 φ 曲线，亦即强调 X 是经 φ 曲线而映射到 Y 的，比如微积分学中叙述就习惯于说"函数"，因为它们需要强调函数（曲线、曲面）的形状特征.

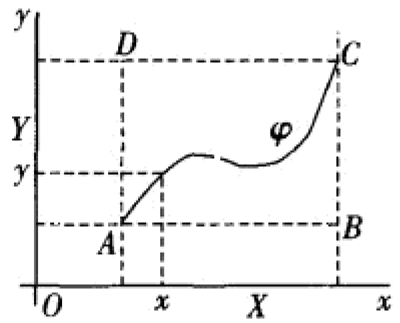


图 1－2－2

（2）应用范畴的差异　从应用范畴来看，"函数"是较为狭义的. 它常常仅指能写出函数表达式或强调函数式特征的情形；而"映射"则较为广义，它既可表述已经形式化了的映射关系，也可表述未经（或难以）形式化的映射关系.

§3　数学的结构

数学有三大基本结构：序结构、代数结构和拓扑结构，这是布尔巴金学派的重要贡献之一，布尔巴金学派是希尔伯特哲学学派（三大学派中的形式主义之后）的继承者，他遵循希尔伯特的公理化思想，去认识数学的基本对象——集合的各种特征，从而提出三大结构理论，现代数学正是在此结构下深入的.

一、序结构

布尔巴金把序关系公理化界定成满足自反、传递、反对称等"三律"的二元关系"≤". 自此,符号"≤"已不仅表示数间关系,而且抽象成一般事物间的关系. 进一步,布尔巴金还总结并揭示出数学在集合意义下的丰富的序关系,从而总的把它叫做数学的序结构.

1. 偏序集

如前述,一个集合 X 成为偏序集或偏序空间 $\{X,\leq\}$,必充条件是 X 上至少有一些元素间存在序关系. 比如自然数集中的整除关系即是一例. 研究表明,任一 $\{X,\leq\}$ 上皆有全序子集(任二元间皆有序关系的子集). 同时提出了:

Zorn 公理 任一 $\{X,\leq\}$ 皆有最大的全序子集. 并给出 Zorn 定理:

Zorn 定理 若偏序集 X 的每个全序子集都是 X 的真子集,则 $\exists x_0\in X\ni X$ 中与 x_0 有序关系的一切元素 x 皆 $x\leq x_0$.

2. 偏序集的格

在 $\{X,\leq\}$ 上加上公理条件: $\inf\{a,b\}\in X$, $\sup\{a,b\}\in X$, $\forall a,b\in X$,则此特殊的偏序集叫做"**格**". 格是同时具有序结构和代数结构的复合结构集合.

从格的复合结构出发的研究不仅是代数学的问题,也已引申到数理逻辑、泛函分析和拓扑学、模糊数学等等重要学科. 比如 Boole 代数,即是由格深化而成的所谓有补分配格,它是计算机科学上一个十分有用的逻辑学分支. 自然它也是一种具有特殊偏序结构的集合.

3. 对"没有"序关系的集合的序处理

比如向量空间中的元素间则没有序关系,进一步,任一事物构成的集合中也无序关系. 如医生、教师、技术人员、艺术家之间

的单位劳动值，严格说皆没有序关系. 但我们可以作"泛函映射"把集合中每个元素映到实轴上，从而利用实轴的序特征使原集合形成偏序结构集甚至全序集. 总之，可以说，在"泛函映射"的意义下，没有不可序关系化的集合.

二、代数结构

"代数结构"对应于"运算关系". 运算关系中最基本的是"+"，"·"及其推广形式，而各种代数系统正好是在"+"，"·"及其推广形式基础上附加以一定的公理，比如满足一定的运算定律等而界定出的. 反过来说，代数正是以这种方式对数学系统进行分类的，比如群、环、域、体、模、格、线性空间等，分别都是一个代数系统，也是一个代数类. 同时广义的还有同余类、同构类、同态类等也是代数类. 特别地，这种代数关系还广泛地存在于数学各个分支中，参与数学的基本构成，所以称它为数学的一个基本结构.

三、拓扑结构

拓扑结构是对空间的某种特性的描述，源于对欧几里得空间的邻域特征的认识，即发现. 任一个开的欧氏空间 Ω 总有这样的开集构成特征，使得空集是开集、全集 Ω 是开集，Ω 中有限个开集之交是开集，无限个开集之并也是开集. 特别地，还可在 Ω 的全部子集集(幂集) 2^{Ω} 中找到子集 $\tau \subset 2^{\Omega}$，使之在 τ 上满足上述四条"开集公理". 于是问题被公理化地抽象，从而被推广成描述一类集合 Ω，只要 Ω 及 $\tau \subset 2^{\Omega}$ 满足上述"开集公理". 显然这样的 Ω 实为一个大类，记为 C^{H}，叫做**拓扑类**.

至此可见，虽然拓扑空间的抽象定义使初学者不易理解，但它使问题从欧氏空间抽象出来后，适合于一大类(C^{H})空间. 这再次体现了数学抽象的意义.

这里对 C^H 的分类和探讨，涉及到一个拓扑空间变成另一个拓扑空间的变换问题或说对应关系的问题，这个对应关系就是映射 $\varphi: X \to Y$. 当其映射 φ 满足连续性，则拓扑空间 X 映成的 Y 必为拓扑空间，这样的映射 φ 叫做**拓扑映射**. 拓扑学是研究拓扑映射下拓扑空间的不变量的科学，因此拓扑学的生命力即在于拓扑映射研究或说拓扑空间的对应关系研究，这种研究的基础则是通常的邻域、序列、聚点、收敛、极限、开闭集、连通性等等.

当拓扑映射 φ 满足"满射、单射且双射"关系时，叫做同胚映射，这时叫拓扑空间 X 与 Y 同胚，一般记为 $X \simeq Y$.

对于同胚映射 φ，当 φ、φ^{-1} 皆可微时，称 φ 为微分同胚，研究微分同胚下不变量的学科叫微分拓扑，形成于20 世纪60 年代初.

设 $\varphi: X \to Y$, $\Psi: X \to Y$ 皆连续映射，且有对 x、t 的二元连续映射 $F_t: X \times [0,1] \to Y$，满足 $F_0 = \varphi$, $F_1 = \Psi$，则称 φ 与 Ψ 同伦. 一般记为 $\varphi \backsim \Psi$，参见示意图1－2－3. 对同伦类的研究是当今微分拓扑学的热点之一.

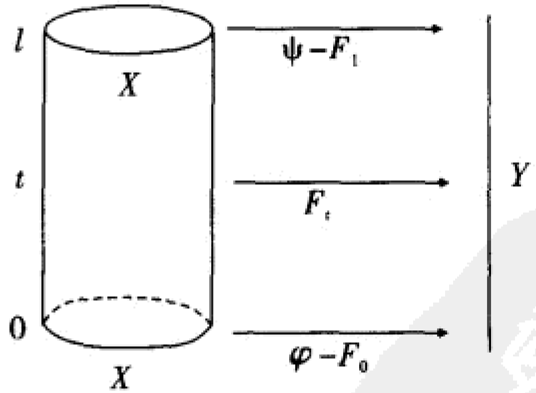


图 1－2－3

总之拓扑空间，有着丰富的研究内容，拓扑学种种概念也像代数概念一样，成为数学的又一个基本结构.

§4 无穷的认识

“数学是研究无穷的科学”(希尔伯特),它揭示出数学的又一大特征.数学对无穷的研究无论从其历史深度和广度来讲,都是其他任何学科所不及的.同时,许多深刻的数学成果都是在无穷概念(比如无穷级数)下得到的.

一、无穷的基本类型

无穷又叫无限.基本类型有无穷大、无穷小和无穷多3种,其中最基本的还是前两者.一般记无穷大为∞,则无穷小即为$\frac{1}{\infty}$,若记无穷小为o,则无穷大即$\frac{1}{o}$.这种无穷大与无穷小间的关系为反演关系.由此,知道了其中任一个的性质即可了解另一个的性质而不必重复.

一个集合X为无穷大是说在X中任意指出一个任意大的集合X',都可以在X中找出一个这样的集合$X''\subset X$,$\ni X'\subset X$.集合X可以是高维空间,可以是一维数轴,也可以是一维时间(正实轴或叫半数轴),也可以是0维点集(无穷多元).

出于直观理解,在欧氏意义下的数学中认为无穷大是不存在的、发散的,但在个别(非欧)情形下为了形式化分析的需要,可以把无穷大作为一个数或一个几何点(无穷远点,无穷远边界)来处理,比如拓扑空间中加点紧化处理.这在“射影几何”中即可证明是合理的.

一般情况下,用有限形式来表述无穷,最基本的方式是周期.比如一般周期的定义域皆无穷空间.在无穷序列中仅其序号有周期,而无穷序列只有作为序号函数的序列通项具有规律时才是可

认识的.

至于无穷多,其实是无穷多元的集合情形. 关于无穷多元集的研究有两大类型:一类是无穷多元间的组合关系研究;另一类是无穷集合的结构认识.

关于无穷组合的认识,已是数学的一个方面的内容.

二、关于无穷的简介

1. 古代和近代对"无穷"的认识

从历史上看,当初毕达哥拉斯的有理数错误是因为对无穷小的起码认识不足,后来当人们意识到了这点后,仍然无法认识它,因此产生了穷竭法来回避无穷小.

在穷竭法产生的同时,哲学上产生的芝诺悖论,也仍是因为对无穷小认识不足引起的. 穷竭法在当时流行于数学中,也作为一种思维方法流行于哲学界. 其实穷竭法是有理数在数学发展中的局限性和芝诺悖论两大事件的共同作用下形成的.

17 世纪微积分的诞生使得数学实在不能回避无穷小了. 对无穷小认识的争论又进行了两百年. 极限论的诞生使微积分学获得了新生.

18、19 世纪是微积分方法迅速发展时期,其中无穷序列、无穷级数理论的发展也是人类对"无穷"认识的进展,具体说是对有序无穷集的一种认识. 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)从无穷级数中发现有名的"点点连续却点点不可导"奇例,加强了分析学的严格特征.

2. 现代数学对无穷小空间结构的认识

(1)19 世纪产生的极限论,对无穷小空间作了序列点式地逼近,揭示了无穷小空间的一个极好的极限性质.

(2)20 世纪前半叶物理学中产生的量子力学,把量子世界叫"不可尺度空间",实际上是物理学对无穷小空间的一种逼近性认识.

(3)20 世纪 60 年代数学中的数理逻辑内产生了非标准学分

支，克服了极限论认识无穷小的局限，对无穷小认识又一次深化.

3. 对无穷多元有界集的认识

(1)康托尔提出了"可数无穷集"，用"一一对应"的映射概念表明自然数、整数、有理数等，都是"可数"、"无穷集".

(2)康托尔还证明了一般无穷集的性质.

(3)康托尔证明了存在不可数的实数集.

(4)康托尔提出了势的概念.

三、关于无穷的认识

1. 关于无穷小的认识

(1)关于数列$\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \cdots, \frac{1}{10^n}, \cdots$

当 n 无限增大($n \to \infty$)时，$\frac{1}{10^n} \to 0$，即 n 无穷大时，则$\frac{1}{10^n}$无穷小.

用极限表述为：$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

(2)从函数极限定义无穷小.

若$\lim\limits_{n \to a} f(x) = 0$，则称 $f(x)$，$x \to a$ 是无穷小.

也就是$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$|x - a| < \delta$ 时有 $|f(x)| < \varepsilon$，则叫 $f(x)$ 当 $x \to a$，$f(x)$ 无穷小.

2. 关于$\forall \varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0$ 可以理解为 $f(x_0)$ 附近的连续统邻域. 这里有 $\varepsilon > 0$ 后，如 $|x - a| < \varepsilon$，这是指在 a 附近的一个邻域 $N(\varepsilon)$. 在这个邻域内数是无限的. 因此$\{\forall \varepsilon > 0\}$最多是一个稠密集.

3. 无穷小的一个新定义

对于$\{\forall \varepsilon > 0\}$，所对应的空心邻域系$\{\overset{0}{N}(\varepsilon)\}$的无穷$\bigcap\limits_{\forall \varepsilon > 0} \overset{0}{N}(\varepsilon) \triangleq \delta \neq \Phi$，则定义此 δ 为无穷小.

显然，该定义与极限论中无穷小的定义等价，但有不同之处.

4. 现代数学对无穷的认识状态

无穷小的认识基本过程，是对"无穷小空间"的认识过程.

19 世纪后半叶产生了极限论，对无穷小空间作了序列点地逼近，揭示了无穷小空间的一个极限性质. 20 世纪 30 年代物理学产生了量子理论，它把量子世界叫做"不可尺度空间"，这是物理学对无穷小空间一种逼近性认识，20 世纪 60 年代数理逻辑内产生了"非标准分析学"分支，对无穷小的认识进一步深化.

康托尔提出集合论之后，用"一一对应"映射方法证明了"存在不可数的实数集"的一个重要性质：所有无穷集（$\cup$）皆存在自己的同维真子集（$\mu\subset\cup$）使得 μ 与 $\cup$ 之间具有一一对应的关系. 如 $f(x) = \dfrac{x}{(\varepsilon - x)(\varepsilon + x)}$ 与其子区间一一对应，$x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ε 是任意小正数.

参考文献

1. 钱佩玲. 数学思想方法与中学数学. 北京：北京师范大学出版社，2001
2. 高隆昌. 数学及其认识. 北京：高等教育出版社，2005
3. 吴振奎，吴旻. 数学的创造. 上海：上海教育出版社，2003
4. 王元明. 数学是什么. 南京：东南大学出版社，2003
5. 李文林. 数学史概论. 北京：高等教育出版社，2002
6. ［俄］亚历山大罗夫. 数学——它的内容方法和意义. 王元译. 北京：科学出版社，2004

第三章　数学思维的认识

数学科学之所以可靠、严谨,越来越被当今人们重视,很重要的因素之一是数学的思维. 那么为了我们的数学学习,有必要对数学思维进行认识. 认识数学思维特征,认识思维科学与数学科学的关系.

§1　思维概念概述

一、思维结构

所谓思维,就是人脑对客观事物的本质、相互关系及其内在规律性概念的直接和间接反映. 心理学认为思维包含两个层次:其一,是从大脑反映现实的本质和内在联系的过程方面,揭示认识的高级形式,这属于人脑交换信息的微观过程,叫理性认识过程;其二,研究外界的变化和发展何以成为意识事实,这可以看作人脑与外界环境交换信息的客观过程,是感性认识向理性认识的转化过程. 感性认识包括感觉、知觉、表象,是思维的基础,而表象是感性认识向理性认识的纽带和桥梁;理性认识包括概念、判断、推理,而概念是思维的元素和主要形式. 思维的过程、思维的物质性结构包括感觉、知觉、表象、概念、判断、推理、思维规律和方法

等要素,其相互联系的框架如图 1－3－1:

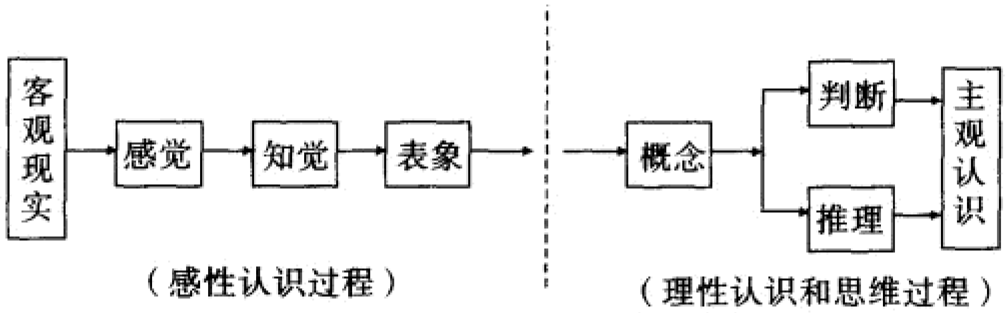


图 1－3－1

以上思维过程,是由物质规律性转化为思维活动的过程,但是一般来说人脑对客观事物运动变化规律的反映,不可能仅仅是"镜面"反射,只反映其重要的本质因素及规律,用数学的观点讲,由物质运动到思维活动一般不是一个同构映射,而是一个同态映射. 思维结构是由最基本的要素构成的系统,它是在不断演变、进化和发展的.

二、思维功能

思维结构是指思维的物质结构,但诸要素各有特定功能,就产生了思维的功能性结构. 所谓思维功能(功能是指整体功能,并非是各要素功能的简单相加)是指思维结构的各个层次有目的的运动而形成. 没有有关信息就无法进行思维,根据信息加工论的观点,思维的主要功能是:接受信息、选择信息、过滤信息、加工信息、转化信息、储存信息、输出信息等.

三、思维特征与思维分类

思维是一种复杂的心理现象,有直线性的过程和非直线性过

程;有正向过程和逆向过程.因而在思维过程中表现出不同的种类和特征.

思维的特征主要有:思维的目的性和问题性、概括性、间接性、逻辑性等.思维分类主要形式:非逻辑思维和逻辑思维.逻辑思维形式有形式逻辑、数理逻辑、辨认逻辑,而非逻辑思维的形式主要有想像、直觉、顿悟.

(1)关于形式逻辑:主要思维形式是概念、判断、推理;主要思维规律是同一律、矛盾律、排中律;主要思维方法是分析与综合、抽象与概括、归纳、演绎、类比、科学假设等.

(2)关于非逻辑思维:想像是在原有表象的加工的基础上,加工改造形成新形象的心理过程.想像思维的特点是形象化和概括性,且具有更重要的创造性功能.直觉与顿悟的主要特点是直接性、突发性和创造性.

四、关于逻辑思维

包括形式逻辑、符号逻辑、辩证逻辑、数理逻辑等.

§2　数学思维及其特征

一、数学的思维和性质

数学思维是指人关于数学对象的理性认识过程.广义的可理解为,包括运用数学工具解决各种实际问题的思考过程.奥加涅相认为,所谓数学思维,其一,是指一种形式,这种形式表现人们认识具体的数学科学,或是应用数学于其他科学、技术和国民经济等过程中的辩证思维.其二,应认识它的一种特性,这种特性是数学学科本身的特点,以及数学用以认识客观世界现象的方法所决定的,同时也受到一般思维方式的制约.

数学研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系. 20 世纪 80 年代后，人们认为数学科学是"模式"的科学，其目的是揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性. 这些对数学的认识可看到：①数量关系、模型是抽象和概括的产物，数学思维具有高度的抽象性；②与科学的抽象性、严谨性、统一性一样，数学也具有这一特性.

二、数学思维的结构

1. 心理学的结构说

现代心理学家认为认知结构的核心称为"图式说"，他们认为认识的发生经过认知结构的"同化"和"调节"，人的认识由旧"图式"转变为新"图式"，从而达到与环境相适应. 认识表现为许多图式的协同活动，随着图式的发展和系统化，形成更加复杂的图式和彼此联系的复杂结构——认知结构.

2. 数学的思维结构

数学的思维结构可看作由思维内容、思维成分和个体思维水平为坐标轴的思维空间，如图 1－3－2.

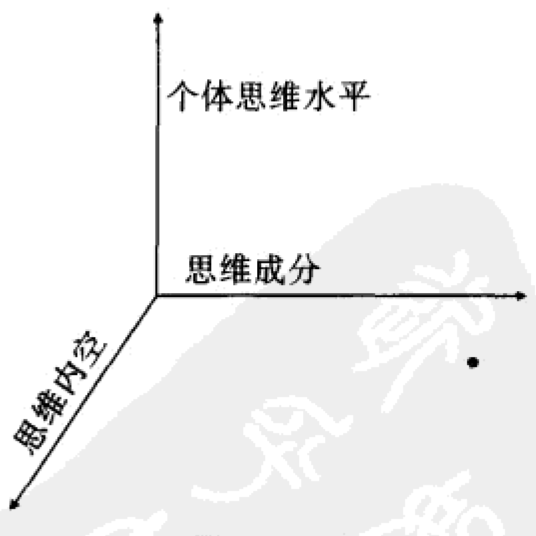


图 1－3－2

数学思维内容,从数学知识的总结和应用角度可分为:对应思维、公理化思维、空间思维、程序思维等;从方法论的角度可将数学思维分为具体思维、抽象思维、直觉思维、函数思维. 数学思维中的个体发展是指:思维的灵活性、批判性、严谨性和广阔性的思维品质,以及人作为思维主体的性格意志、兴趣、情感等非智力因素.

三、数学的发现和数学思维特征

1. 数学的发现过程

一般可分为4个阶段:准备阶段、酝酿阶段、顿悟阶段和检验阶段. 准备阶段是自觉的有意识的活动,它表现在把核心问题从偶然现象中分离出来,调查评价有关知识,进行分析、类比. 酝酿阶段是一个等待时期,它持续的时间不等. 顿悟阶段意味着潜意识和有意识之间的沟通,是创造性思想出现并形成自觉意识的过程. 在酝酿和顿悟阶段,非逻辑思维起着重要作用. 检验阶段是以已有的知识为基础,运用逻辑的思维活动. 因此数学发现过程中,直觉的成分和逻辑的成分并存,且互相补充彼此交叉进行. 由于数学发现过程中含有直觉成分,直觉成分在心理学中对此种思维活动也在进行研究,但仍不能将其归为逻辑框架. 但数学发现的过程中包含有逻辑的成分. 我们总可以从发现的实例中总结出某些规律,给出某些模式和方法,波利亚说:"数学……好像是仅含证明的纯论证的材料. 然而,数学的创造过程却与其他知识的创造性一样,在证明一个数学定理之前,我们总是先猜测这个定理的内容,当你完成证明之前,同样是先得猜测其证明思路,而且这往往要一次又一次地进行尝试."从他的话中可以发现猜测的功能. 因此数学的发现过程是由猜测与论证过程组成的,如图1-3-3.

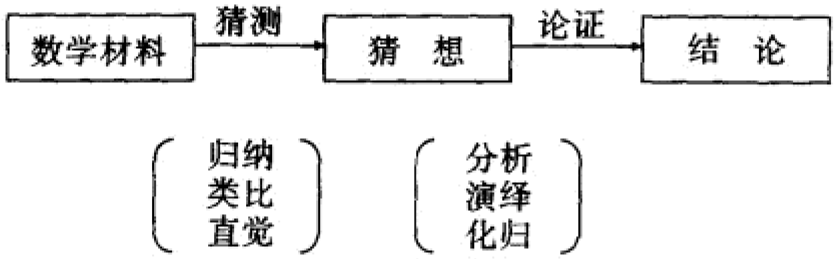


图 1－3－3

其中论证与猜想的过程相互依赖、相互渗透. 而最后获得的结论,不是原来的猜想,而是改进了的猜想,因而数学发现是一个多次反复的过程,如图 1－3－4.



图 1－3－4

2. 数学直觉思维的形式

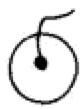
直觉思维与逻辑思维不同,数学直觉思维有 4 种基本形式:直觉观念、直觉推理、直觉判断和直觉启发.

直觉思维是人脑对客观世界及其关系的一种非常直接的识别或猜想的心理状态,它不是对事物作各方面的详尽分析后,才按逻辑规则去演绎、推理,达到对事物的认识,而是从整体上对待对象,通过思考的中间阶段,直接接触到结论的一种心智活动. 笛卡儿在哲学上提出二元论,心理学上提出心身交感论,他认为通过直觉能发现作为推理起点得到的不可怀疑的清晰的定理.

(1)直觉观念　当我们刚接触所面临的问题时,往往是首先看到它的外部特征或部分特征,如图形、式子或其含义的直观类

比. 我们必须借助于直观模型或图形进行直觉思考. 数学越发展，对象越抽象，就越难找到逻辑起点. 先把图形或模型作为想像的载体，发挥模型和图形容纳内容多的长处，可以把许多数学信息包容在一起，使思维迅速简捷. 数学家都善于使对象简单化、思想具体化，在头脑中构成形象.

数学直觉思维中的直观模型和空间图形，在数学活动中的表现主要是具有某种程度的抽象或模式化了的"形象"，我们称之为"心智图像". 这种心智图像不是对对象直接摹写的具体形象，而是介于二者之间的过渡性的带有一定抽象程度的形式化了的东西. 这种心智图像虽然有图像的特征，但它是使用者内部的主观经验的体现，它所代表的内容和意义只有使用者本人才能领会. 例如，平面上一个圆圈的边上再画一段曲线与之相交：



可以想像为一个苹果、一个炸弹、只有一根头发的秃头，也可以想像为一条蛇从盆中爬出.

数学家在研究某一数学问题时，即使没有纸和笔，脑子里也会构思出生动直观的模型或形象，它们表现为用图形、文字、符号表达的有某种规律性的式子等. 这种直观模型或空间图形，作为数学直觉思维的形式，同逻辑思维中的概念有类似的作用. 因此，我们称其为直觉观念，简称直念.

直念和概念既有区别又有联系，直念既有生动直观的感性形象成分，又有一定程度的抽象成分. 它能容纳深刻复杂的数学内容，也可用以进行数学思维. 但它和概念又有区别. 概念的内涵明确，没有模糊性，而直念却有模糊性、歧义性，不好用语言表达. 因此，以直念作为思维细胞的数学直觉思维难以与别人交流.

(2)直觉推理　直念是运动发展的. 刚开始建立的直念是简单的,包含数学对象的本质因素较少,经过想像发挥、引申以后,其内容逐渐由简单到复杂,其中本质因素不断增多. 单个的直念是不足以对一个数学问题进行思维的,多个直念按照一定的秩序连接、变换,就会形成一定的结构,这个结构越来越复杂,会逐渐接近要认识的对象. 但是,从一个直念到另一个直念的变换,不是像逻辑思维那样推理进行的,而是由想像力推动着前进的,想像在这个过程中有着与逻辑思维中的推理相类似的功能. 因此,我们把由想像连接直念的运动过程称为直觉推理.

(3)直觉判断　直觉判断是人脑对于客观存在的实体、现象、语词符号及其表征的相互关系的一种迅速识别或直接理解. 在这个过程中,人们不是分析地、按逻辑规则进行逻辑推理,而是从整体上作出直接把握.

数学直觉判断,常常是在学习过程和研究过程中表现出来. 例如,题目刚一出现,教师还没有解释完毕,学生就说懂了,就是因为结论已被直觉地判断出来. 数学家遇到的问题,许多是与他以前所遇到的情形类似的,解决这些问题的实质,就是判断面临的问题与大脑所储存的各种解决问题的图式的关系,找到与以前经验结果的某种对应,直觉地判断该问题属于何种类型,解决问题应当采取什么方法. 在这个过程中,是迅速确定"是什么",而不是细究"为什么". 这种直觉判断有赖于对整个形势的整体估计. 非欧几何的创始人罗巴切夫斯基、黎曼,正是由于具有这种整体的、直觉判断能力,才敢于提出非欧几何的创见.

(4)直觉启发　数学家沉思于某一问题,不是在头脑中搜索到以前固有的模式,而是在某种外部信息的刺激下,由于联想而使问题豁然贯通,称之为直觉启发,也就是人们常说的"灵感".

直觉启发的特点具有突然性. 它是联想中将那些原来看着互不相干的事物建立起一种联系,使得思维过程中的信息传递跨过

心理障碍，因而又常具有跳跃性.

数学直觉思维中的直念、推理、判断和灵感是不可能截然分开的，它们常常结合于一个统一的思维过程中，其中，最为基本的表现是直觉的判断. 因为，直觉的推理、灵感最后也是以判断的形式出现的，而灵感是直觉的一种典型状态.

3. 创造性数学思维

所谓创造性数学思维，是指思维的结果或处理问题的方法带有新颖性、独特性. 这种思维并非一开始就建立在严格的逻辑论证之上，但它却常常表现出研究者的自信心和个性特点.

西方的一些科学家、哲学家认为，创造是变幻莫测的思维活动，属于不可言喻的直觉、想像和猜测，这是不全面的. 因为不对已有事实与背景知识作出逻辑分析，就难以获得明晰的数学问题；没有在逻辑上对问题的预设思考，就难于确定为求解问题需要搜集哪些材料；没有逻辑推理在思维活动中的运用，不采用它来组织关于新概念和新思想的联系，新的假设就难以建立. 但是，新苗头的发现，新思想的提出，却主要是靠直觉思维的. 可见数学创造性思维中既含有逻辑思维的成分，也含有直觉思维的成分.

这与现代生理学和心理学研究结果是一致的. 现代生理学及心理学的研究表明，人的左右两半脑在思维上是分工合作的，左半脑主管逻辑思维，右半脑主管形象思维.

从思维过程的状态来看，创造性思维在总体上总是表现为：

$$\cdots\to\text{收敛思维}\to\text{发散思维}\to\text{收敛思维}\to\cdots$$

发散以便于联想，寻找各种知识组块之间的可能的组合，发现推理的起点. 收敛以便于集中思考，验证由发散思维所得到的方案的可行性，对其补充、修正或提出新的方案.

§3 数理逻辑

从上一节可知思维分为两大类:逻辑思维与非逻辑思维,逻辑思维的主要形式有形式逻辑、数理逻辑、辩证逻辑等. 逻辑思维是思维形式、思维规律、思维方法的科学. 17 世纪起,以莱布尼茨为代表的数学家和逻辑学家,用数学的方法研究形式逻辑的有关问题,形成了新的逻辑学——数理逻辑. 到 19 世纪末,数理逻辑运用了数学方法,数理逻辑的研究对象也转移到数学证明和数学公理方法等方面. 到 20 世纪 40 年代被广泛用于自动控制系统和电子计算机领域.

一、数理逻辑的形成与发展

数理逻辑思想萌发于莱布尼茨用代数演绎来表述形式逻辑,后来为布尔发展成布尔逻辑(1847 年),对于电气和计算机理论十分有用,也是数理逻辑的前身. 以后则是弗兰克尔、佩亚诺、罗素等人开创的现代数理逻辑(1894 年),简称数理逻辑.

数理逻辑的发展又分为两个阶段:1894 ~ 1930 年为激进时期,此时期内受逻辑主义的影响较大,主要是罗素的《数学原理》致力于把数学还原为逻辑学. 亦即要使整个数学包含于数学逻辑. 他认为"数学就是所有形如'P 蕴含 q'的命题集,这里 P、q 都含相同数目的一元或多元命题". 因此他企图在其"类"和"关系"概念下,通过演算推出"自然数系"和算术,乃至整个数学,直至发现了悖论才罢休. 数理逻辑发展的第二时期是 1930 年以后,由于哥德尔不完全定理使之走向正常发展时期,其宗旨是回避悖论,用无限形式探索数学的真正基础.

二、数理逻辑的主要分支

已有的数理逻辑分支主要有5个：

1. 证明论

又叫元数学，1893年由弗兰克尔创立，后为希尔伯特所发展. 旨在证明数学的"相容性". 最初试图用有限步来完成，后为哥德尔不完全定理所破，改为无穷步证明，并用上甘岑的"超穷归纳法"，至今仍未实现目标.

2. 递归论

产生于1930年，由丘奇、哥德尔、图灵等所创，致力于探讨数学中用有限步可获得精确结果的所谓"有效可计算问题"，因此属于所谓"硬数学". 称有效可计算函数为递归函数，有名的形如：

$$\begin{cases} f(0) = x_0 \\ f(x_n + 1) = g[n \cdot f(x_n)] \end{cases}$$

的"计算复杂性问题(又叫判定问题)"即属此领域.

3. 模型论

产生于1950年，旨在人为地构筑"模型"，以检验或解释数理逻辑中某种或某组语句(结论)的真伪.

模型论是比较深奥的一个分支，它对数学的贡献也不小.

须指出，这里的"模型论"与应用数学中的"数学建模"不能混淆，尽管二者中"模型"一词的概念完全相同，但其对象、适用范围和目的任务皆完全不同. 最起码的差别是，一个属纯数学中的数理逻辑，另一个则是应用数学中的一个方法性分支.

4. 公理集合论

这是继罗素悖论和哥德尔定理之后在数理逻辑中产生的一个新分支，其宗旨是要在回避悖论的前提下证明康托尔的连续统假设，也使集合论本身形成完整的理论体系.

5. **非标准分析**

1965 年在模型论的基础上产生的非标准分析,如今已发展成数理逻辑的一个分支学科.

三、数理逻辑中的一些符号和术语

1. **逻辑符号**

连词:$\neg$(非)、$\wedge$(且)、$\vee$(或)、$\Rightarrow$(蕴含)、$\Leftrightarrow$(等价).

变词:可数多个符号,如 x、y、z,…

附加常词:一组符号,通常用英(或希)文词的第一个字母.

量词:$\forall$(全称)、$\exists$(存在)等.

括号:[,]、(,),用以对公式分组.

关系符号:$\in$(是…的一元)即"属于"、$\doteq$(等集)、包含于($\subset$或$\subseteq$)、S(　　　)、R(　　　)等.

2. **原子公式与公式**

(1)原子公式:如 $x \in a$, $b = y$, $x = z$ 等最简单的关系式.

(2)公式:有限次使用形式语言将原子连成的形式叫公式.

例　设 φ 是原子公式,则如$\neg\varphi$, $[\varphi \vee \psi]$等即为公式.

3. **术语**

(1)量词的辖域:设 φ 为公式,则公式$(\forall x)\varphi$和$(\exists x)\varphi$中,φ 为相应量词的辖域.

(2)语句:若公式$(\forall x)\varphi$或$(\exists x)\varphi$中变词 x 在量词$(\forall x)$、$(\exists x)$的辖域 φ 中,则称 x 为约束变词,否则叫自由变词. 当 φ 中每个变词皆为约束变词时,φ 叫做语句. 否则只要有一个变词为自由变词,φ 就叫做谓词.

例(1-3-1)　$(\forall x)[\vee(x)]$为一语句,且是有界语句,但$(\forall x)[\vee(x)] \wedge [W(x)]$则不是语句,因为公式 $W(x)$ 不属辖域,所以其中 x 为自由变词,这时称为谓词,谓词的概念,参见徐利治《现代无穷小导引》(1990 年).

(3)系列基本概念:诸如解释映射、滤集、超滤集、转换原理、前束范式等等.

(4)数理逻辑研究:命题逻辑(又叫命题演算)、谓词逻辑(又叫谓词演算).

四、现代科学基础上认识形式逻辑

逻辑思维是客观世界规律的反映,在今天现代科学基础上人们对它的认识更深刻、更奇妙,认为"形式逻辑是物质宇宙的运动和运动生成的属性". 现将高隆昌先生的几个观点介绍给大家:

(1)形式逻辑的一个根本规律是"因果律".

(2)物质宇宙的根本特征是运动.

(3)物质宇宙是个动力系统.

(4)同一律、排中律、矛盾律仅表明"正常思维"的条件,但不独立. 充足理由律揭示形式逻辑特征.

(5)"因果律"正合物质宇宙 X 的动力系统特征.

(6)猜测:"逻辑思维的背景空间 = 完全宇宙 = 逻辑思维对象集".

五、关于多值逻辑

多值逻辑是数理逻辑学的推广理论. 多值逻辑又叫多秩逻辑,它是二值逻辑的推广和派生. 其思想起源于 19 世纪布尔代数. 有关多值逻辑的内容,可读《数学及其认识》(高隆昌著,2005. 5. 23)

§4 形式逻辑

一、基本概念和特征

形式逻辑就是形式逻辑学，又叫一般逻辑、基本逻辑、传统逻辑. 也可简称为逻辑思维、思维逻辑或逻辑学. 这是因为不管从历史的久远还是现今发展的规模来看，形式逻辑都绝对居于逻辑学的主体位置. 如今的逻辑学分支中除了辩证逻辑等少数分支外，都可以认为是形式逻辑的分支或说派生出来的.

形式逻辑研究人类凭其意识能察觉出来或能描述出过程来的那部分思维活动. 具体地说，它研究思维的形式结构、内在规律和基本方法.

形式逻辑学属发现型学科，而非创造型学科，它在我们的思维活动中去发现，用我们自己的思维去发现我们自己的思维.

形式逻辑的特征首先是概念化，然后在概念基础上提出命题，进行推理、判断，也有包括证明、辩论等活动. 实际上这些思维活动也就构成了人类基本的思维活动，包括社会生活和科技活动中的基本思维活动，此外便是灵感、创造、省悟之类的高级思维活动了.

形式逻辑的思维是在脑内进行的，有着明显的脑内反映. 这个反映的机制就是脑的概念化机能. 这个概念化“机能”，把客观事物能动地反映到大脑，从而形成一个概念，这时的“概念”是已经脱离了原像，被升华了的脑内模式或叫脑内信息. 这时的概念化机制就好比应用数学中模型化（建模）过程.

二、四律——思维规律

同一律、排中律、矛盾律和充足理由律等“四律”，是形式逻辑

的基本定律,它们是形式逻辑的思维规律.

同一律指思维过程中,对象(问题)不变、概念不变.

排中律要求思维的前提条件和思维过程都要防止模棱两可,保持明确清晰的思路.

矛盾律实为“不矛盾律”,系指整个思维过程或其中任一阶段皆不能产生前后矛盾现象,包括不产生循环论证现象.

充足理由律是针对证明、辩论的思维规律提出来的. 显然它也在于保证思维结果、推理结论的惟一性和准确性. 严格说来,充足理由律与排中律的结合保证了思维结论的惟一性;充足理由律与矛盾律的结合保证了结论的准确性.

人们在书本的习题中常常有所谓“需要讨论”的问题即属不满足充足理由律的形式. 这时需要补充条件才能得到惟一确切的、满足充足理由律的答案.

例(1-3-2) 若说“求一个点 x 使它满足方程 $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$”,则这时它不满足充足理由律,因为满足方程的 x(解)有两个,$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 但若说“在[0,1]区间上找一分点 x,使之全段与长段之比等于长段与短段之比”,则理由充足,只有一个解,即 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$(黄金分割).

一般情况下,对于需要补充条件才能得到确切结论的问题,视其补充的条件不同,相应结论也会不同. 所谓“讨论式问题”在科研实践中经常出现.

总之,四律中,前三律是针对思维过程提出来的约束,第四律则是在前三律基础上为保证结果的准确性而对前提条件提出的要求.

三、符号逻辑——现代形式逻辑

符号逻辑又叫做现代形式逻辑. 从认识过程看,它由如下两个步骤产生.

1. 语言转向

当逻辑学家们认识到过去的形式逻辑的弱点在于语言表达上的缺陷时,便自然地产生了改变语言形式的要求,叫做"语言转向"要求. 由于当时的数学已进入高等数学时期,"语言转向"有符号化和精确化的明显特征. 又因为当时一些哲学家、逻辑学家本身就是数学家,自然他们意识到为了精确化,就需要符号化.

2. 符号化

顾名思义,即采用一套符号体系及其组合的"语句"、"公式"等等,加上一些必要的白话叙述,以完全代替经典形式逻辑的完全白话式的推理方式.

3. 符号逻辑的类型

符号逻辑有两种类型:

(1)以保持传统形式逻辑特征为特色的符号逻辑. 它仅限于语言的符号表征. 但显然不能以此形式作推演,而不得不仍然用传统的思维方式作推理和论证,但由于传统形式逻辑的弱点,其不可能成为专门的学科.

(2)由符号逻辑为特色的数理逻辑采用了符号化、公理化形式手段,使数学中的论证真正呈现出数学的方式和数学的特征.

§5 辩证逻辑

一、辩证逻辑哲学背景

一般认为，辩证逻辑学启蒙于康德，是他在《宇宙发展史简论》(1755)中提出了宇宙的"对立统一"结构，在《纯粹理性批判》(1781)中提出"二律背反"概念，奠定了后来"辩证逻辑学"中重要的"对立统一律".

黑格尔发展了康德的这一辩证思想，其特点是把认识的世界范畴大大推广了. 黑格尔第一个把整个自然、社会、精神、历史描述成一个大系统，可叫做大自然. 他认识到大自然的结构不是静止的，而是不断演变、发展着的，并主张用这种方法去认识大自然的规律.

辩证逻辑成为一门学科，归功于马克思、恩格斯在黑格尔思想基础上创立了唯物辩证法，并发展成辩证唯物主义，从而产生了"辩证逻辑"这门学科.

总之，辩证逻辑就是用辩证观点去认识客观世界结构规律的学科. 所谓"辩证观点"就是辩证法，所谓"辩证法"就是用非静止的、动态的、灵活的、具体问题具体分析的方法和"二象论"的观点去认识客观对象.

二、辩证逻辑规律

辩证逻辑可归为"三律"：对立统一律、量变质变律、相似律.

对立统一律　又叫做矛盾统一律、二律背反原理、二象性原理、一分为二原理. 根据"二象性"理论，深刻广泛地反映了客观世界任何事物内和事物间都有对立统一的结构特征，因此它被认为是辩证逻辑的一项根本性定律. 关于"矛盾统一律"中的"矛盾"

概念与“形式逻辑”中“矛盾律”的“矛盾”概念是完全不同的，这里“矛盾”表示客观世界通有的一种结构特征，是客观规律，是应该遵从的；形式逻辑中的“矛盾”是推理中产生的一种错误，是主观造成的，是应该防止的. 前者为“自然矛盾”或“客观矛盾”，后者为“逻辑矛盾”或“语言矛盾”.“矛盾论”即是在“自然矛盾”（矛盾统一律）观点下发展起来的一个研究“一分为二”的辩证逻辑分支.

量变质变律　即量变能产生质变的定律. 这就是世界上存在的一种“突变”现象. 按突变论的说法，“突变”是表现事物形态的参数达到某种临界值时所产生的事物形态急剧改变的现象. 从逻辑学观点来看，则说构成事物的因素产生了变化，当这种变化随着时间积累，达到一定“阈值”时，事物便产生一种飞跃，形成质的改变.

不过，如果把事物因素的量变积累统一作为“因”，把突然的质变现象作为“果”来看，量变质变规律也可说是属于形式逻辑的. 尽管这里“因”与“果”间的过程十分短暂，但它在我们思维中，其推理过程仍然存在. 所以综合各种思考认为，量变质变律属于辩证逻辑规律.

此外，黑格尔的“否定之否定”律也是属于量变质变律的.

相似律　相似也是客观世界（大自然）中广为存在的一种结构规律，不仅有横向结构上的相似，也有纵深层次上的相似；不仅有有形事物上的相似，也有无形事务上的相似，甚至现象与本质之间也有相似. 比如，初等几何上的“相似”系指几何空间的（横向的或纵深的）相似；语言上的“比喻”系指事物或事务间的相似. 特别地，分形理论所揭示的也是事物或事务间纵深层次的相似特征，且是一种普遍规律.

总之，相似律包括分形律，因为它是广泛的、大自然的一种结构规律.

三、辩证逻辑的本质与特征

上述现象亦表明,体现辩证逻辑本质的背景空间是包含和超出形式逻辑背景空间的. 辩证逻辑是高于形式逻辑,指导形式逻辑的.

已知形式逻辑是一般的思维,但要使思维更有质量、更能符合客观规律、更能揭示客观世界的本质,那么就要接受辩证法的指导,树立辩证观点是十分重要的. 换句话说,思维推理的前提条件和概念来自客观世界,这时"概念"来自事物却是脱离了事物(或高于事物)的,因此可能失真甚至产生歪曲. 那么,辩证逻辑或说辩证法,则在这方面帮助思维或指导思维,它告诉我们在思维过程中,要注意客观事物的结构是系统的,有普遍规律的.

辩证逻辑的发展是非常缓慢的. 辩证逻辑学形成以来,已逾百年,却一直未能成为一门正式的基础学科,更谈不上发展成学科体系. 原因自然很多,但归根结底可能是辩证逻辑涉及的背景空间超过了形式逻辑背景空间,以致引起认识差异和困难. 因它不仅超越了 X(物质宇宙),也超越了 X^*(对偶空间),这就变得太抽象. 特别因为这个事件产生在自然科学中兴时期,自然科学在整个科学中占据统治地位,甚至可说形成了"自然科学主义". 在当时不要说对超越(X,X^*)(完全空间)的世界进行研究,就连承认它也是很艰难的,因此在这种状态下形成了两大特点:①在辩证逻辑研究方向上,仅重于(X,X^*)上的研究,它回避了对超越(X,X^*)的领域的探讨;②在辩证逻辑学概念的研究中,产生了哲学上有史以来最为厉害的争论,这就是唯心论与唯物论的争论,甚至上升为世界性政体上两大阵营的斗争.

正因为对辩证逻辑的基本观点、概念范畴等基本问题难以统一,不具备形成自己的形式化系统的条件,因而难以运用现代研究手段去发展它,从而使得辩证逻辑发展很慢.

§6　数学逻辑

尽管在数学哲学中曾有过数学与数理逻辑间隶属关系争论，但今天看来，数学的范畴至少要包含数理逻辑，而数学的背景空间、数学与所有逻辑学科的关系也是应该研究的.

关于数学和哲学（特别是逻辑学），它们的关系最为密切，从历史的事实，到现代的事实，数学对逻辑学的贡献都是令人注目的. 它不仅有作为主体学科的数理逻辑，而且还推广、发展、派生出了一系列分支逻辑学科，诸如"中介数学"、"制约逻辑"、"辩证数理逻辑"等等. 有的数学家认为，整个数学体系本身就是一门特别的逻辑科学，它是一门特殊的无限逻辑系统. 正是有这些，人们说："数学是训练思维的体操. "

本节我们希望对数学逻辑进行粗略的认识. 数学哲学近些年在我国也很活跃，因为这是一个宏大的理论问题，我们只能粗浅介绍一下.

一、数学具有逻辑学的基本特征

有人说数学是训练逻辑思维的绝好教材. 思维规律的逻辑学，包括辩证逻辑，以"概念化"作为基本特征，如果说现代逻辑已在概念的基础上进展到了符号化乃至形式化，那么数学各个分支也完全地具备了这一概念化、符号化、形式化特征.

逻辑学可理解为"对客观世界进行抽象认识，然后再返回去认识'抽象'的客观世界"的学科，那么，数学也正是这样.

关于逻辑学可理解为有狭义的和广义的两种，前者是从客观世界提升成一套有限系统，进行封闭运算，后者则是一种无限系统（无限多公理概念），既然无限，即不能呈列出来，却也是有效的，可以说数理逻辑已在走这条路.

二、数学具备的独有特征

第二章我们已经谈及数学的特征，这里从逻辑学方面去讨论. 针对逻辑学的有限形式，数学本身却是个无限形式系统. 我们抽象地（不必实际地）把数学所有分支（包括过去、现在和将来可能产生）的全部概念集、符号集、公式集、运算推理规则集，一并归成一个大的形式系统，因为人类世界是进步的，人们对客观世界的认识是发展的，因此数学科学也不会止步，数学本身是无限形式系统. 针对数学的无限形式具有两个特点：

（1）数学的新理论、概念、符号、公式等还在产生，几乎每一门学科中概念、符号、运算等等，遍布于学科整个内容，难以罗列出来（只有已经公理系统化了的诸如几何学、数理逻辑学某些分支等少数学科容易罗列出来）. 特别因为一般学科尚未最后成熟，随着它的发展，还在不断产生着新的概念、符号、公式等，所以从这一意义讲，数学是个无限形式系统.

（2）数学的分支还在不断创立，数学学科内容还在不断增多，因此其学科集（包括尚未创立的学科）难以罗列出来，因为未创立的学科，也将有它独立于已有学科的系统，仍然是表征整个数学世界的成分，从这一角度说数学也是个无限形式系统.

20 世纪 30 年代，数理逻辑已经认识到了，要表征数学至少有无限的形式系统才行，为此数理逻辑（比如递归论）已创造了无限递归、超穷归纳法等，但人们并不如愿，那么，这里我们则把数学的过去、现在与“未来”的一切形式作抽象地汇总，自然应该是最准确的、最简便的，当然也是不可罗列出来的，不可操作的，但体现了我们的意图.

数学不仅含有现代形式逻辑的特征，也有普通形式逻辑和辩证逻辑的特征.

因为数学广含现代形式逻辑特征，因此被误认为它仅仅属于

现代形式逻辑，因此，这里将表明，它不止于此. 比如还含有传统（普通）形式逻辑的特征和辩证逻辑的特征.

（1）数学推理中的普通形式逻辑　世界著名数学教育家波利亚推崇的“合情推理”中即包含有白话语言的直观理解，显然它属于普通形式逻辑，即使考虑到它有时也有“半定量”性，最多只能算是类符号逻辑的而非数理逻辑的.

（2）数学中的辩证逻辑特征表现

例（1－3－3）　极限概念，比如 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\ni |x - x_0| < \delta$ 时，必有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则叫 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限为 A，把这一过程记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. 这里充分体现了量变到质变的规律，是辩证逻辑的.

同理，当 $y = f(x)$ 在 x_0 处光滑时，显然增量 Δy 与 Δx 将同时缩小至 0，却可能有 $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$，$x_0 \neq 0$，类似这样凡有极限的地方都体现出量变质变的辩证逻辑特征.

例（1－3－4）　高隆昌文章“一类交通安全与经济效益模型”（载《系统工程》91 增刊）中有这样一个模型

$$F(X,t) = f(X^0(t)) - \frac{(1+\varepsilon)X^1(t)}{\left(\frac{\alpha \Delta t}{1+\Delta t}\right)\Pi(1-G_i) + \varepsilon}$$

其中 $G_i = \int_{t_i}^{t} (g_i(x^2(t))dt \in [0,1]$，$g_i(x^1(t))$ 为第 i 个不安全因子，$X = X^0 + X^1 =$ 生产投入＋安全投入，其他符号自明. 显然 g_i 在 $[0,1]$ 上量变到 1 时将使 F 产生质变.

又如，我们在 Ecological Modelling，84（1996），11～27 大熊猫与箭竹的生态规律的数学模型中，也体现了这类量变到质变的辩证逻辑特征.

例（1－3－5）　线性空间的“对偶空间”V^* 与原空间 V 所构成的完全空间（$V, \bar{V}^*$）即是一个对立统一系统，特别完全空间中

提出的二象互胀模型更是数学表征客观事物“对立统一律”的典型一例.

至于相似律,在数学中从古典到现代,从初等到高等,都广为存在的相似性研究内容,比如从傅里叶级数到调和分析,都广为存在相似性.特别地,已谈到的“分形几何学”这一创自20世纪70年代的数学分支,更是专门揭示客观世界相似结构的.

总之,不可否认,数学中特别是现代数学中也有丰富的辩证逻辑特征,只是由于辩证逻辑的范畴和背景空间尚未明晰,而数学的边际也未清楚,所以辩证逻辑与数学间的包含关系目前尚无法得知.

三、数学逻辑的概念界定

以数学现有的和将有的各分支学科中已有的和将有的概念集、符号集、公式集、规则集、运算集,这样每一集都是无限集的总体无限集,所形成的一个无限的形式系统叫做数学逻辑.它针对其背景空间,经概念化抽象成模型和问题,然后用广义的数理逻辑或说“类”数理逻辑的手段,探索更为广泛的客观世界规律,而不是像数理逻辑那样,探索的只是数学的内在基础(纯数理逻辑推出的数学内容部分).

总之,数学逻辑就是数学本身,其意义仅在于,有了数学逻辑的概念以及它与形式逻辑、辩证逻辑的关系认识,以后找“数学的逻辑范畴”就方便了.

四、几种主要逻辑范畴间的关系认识

至此已就主要的逻辑体系作了简述,现在综合起来看看它们的概念之间包含关系或说它们的范畴间包含关系.

我们将辩证逻辑范畴、形式逻辑范畴、数学逻辑范畴、现代形式逻辑范畴、数理逻辑范畴的关系,用高隆昌先生所给出的剖视

图展现出来，见图 1－3－5，以此来作为本节的结束。

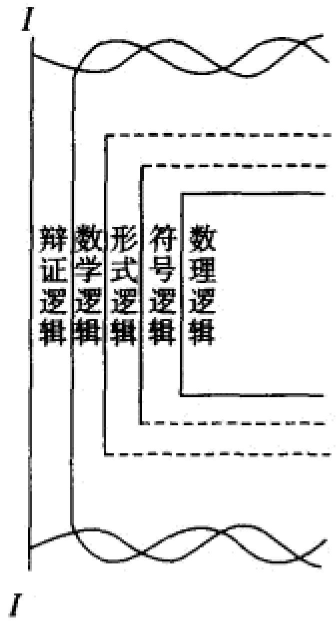


图 1－3－5

§7 数学美与数学思维

一、美的表现

数学美自古以来就吸引着人们的注意力. 古希腊的学者认为球形是最完美的形体；毕达哥拉斯发现了勾股定理，他认为直角三角形具有这种简明、和谐的关系美；爱因斯坦 12 岁时，得到了一本欧几里得几何教科书，它的严谨、明澈和准确，给爱因斯坦留下了不可泯灭的印象；罗素 11 岁学习欧几里得几何，感到这是他一生中的一件大事，他像初恋一样地入了迷，认为它是世界上最有趣的东西；明万历二十八年（公元 1600 年）《几何原本》传入我国，徐光启见到后将其推崇为“度数之宗.”数学美比比皆是，正如

人们常说的:"哪里有数,哪里就有美."数学美不同于自然美或艺术美.正如英国数理哲学家罗素所说:"数学,如果正确地看它,不但拥有真理,而且也有至高的美,正像雕刻的美,是一种冷峻而严格的美,这种美不是投合我们天性的微弱的方面,这种美没有绘画或音乐那些华丽的装饰,它可以纯净到崇高的地步,能够达到严格的只有伟大的艺术家才能显示的那种完美的境地."可见数学美是一种理性的美、抽象形式的美.没有一定数学素养的人,不可能感受数学美,更不能发现数学美,因为他们就根本不能理解数学研究领域中何以为美.

二、数学美感的要素

数学美的主要特征有简单性、对称性、统一性和奇异性,它们都是数学美感的要素.

1. 简单性

真理往往是简单明晰的,这一点在数学中表现得极为突出,三条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0, A_2x+B_2y+C_2=0, A_3x+B_3y+C_3=0$ 共点的条件是:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0;$$

点 (x_1, y_1) 到直线 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ 的距离是:

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$$

这些结论都具有极其简明的形式.

勾股定理 $c^2 = a^2 + b^2$,这一简单而整齐的形式,表达了一切直角三角形边长之间的关系.

指数式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$,被人们认为是一个非常优美的公式.原因在于,指数函数与三角函数在实数域中看不出任何联系,而在复数域中却发现了它们可以互相转化,并且是被一个非常简

单的关系式联系在一起.

表面上看来复杂得使人眼花缭乱的对象，一旦理出了头绪，却显得异常的简明，从而会唤起理性上的美感.

2. 对称性

形体的对称性，在自然界中处处可见. 树叶以其主叶脉为对称轴；花瓣的分布各向均匀；蜂巢、蛛网呈正多边形；人体也是左右对称的等.

人们欣赏对称的美，对称也给人类生活带来方便. 例如，器物、房屋、庭院都讲究对称.

解析几何中，方程 $\rho = a\sin3\theta$ 与 $\rho = a\cos3\theta$，$\rho = a\sin2\theta$ 与 $\rho = a\cos2\theta$ 所表示的曲线，人们分别冠以三叶玫瑰、四叶玫瑰的美称.

对称不仅表现在几何图形上，在数学表达式中也大量存在. 二项式展开的系数具有对称性；三角形中的恒等式、不等式也具有对称性.

一般地，设集合 M 有一个到自身的变换 f，M 的元素之间定义了某种关系"$*$"，a、$b \in M$ 在变换 f 之下的像是 a'、$b' \in M$. 如果 a、b 之间具有关系"$*$"，则 a' 与 b' 之间仍保持关系"$*$"，即 $a' * b'$，就称变换 f 是集 M 关于关系"$*$"的一个自同构对应.

设 M 是一个给定的集合，P 是 M 的一个子集，如果 M 有一个自同构对应 f，使得对 P 的任一元素 x，仍有 $f(x) \in P$，则称集合 P 是对称的.

反射、旋转、平移都是自同构对应，把它们都记为 f，如果集合 P 的任一元素 x，都有 $f(x) \in P$，则 P 在反射、旋转、平移下是对称的.

多项式的对称性可以用置换来刻画. 例如，多项式 $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$，置换 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 将 $Q(x)$ 变为自身. 其实，

置换f的第二行可以取成1、2、3、4的任一排列，这样的置换共有24个，它们刻画了$Q(x)$的对称性. 多项式$G(x) = x_1^3 + 2x_2 + x_3^3 + 2x_4$，在置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$之下都是不变的. 这四个置换刻画了$G(x)$的对称性.

对称性可以更广义地解释为某种相应性. 例如，乘与除、微分与积分都是如此. 再如，在一定条件下，有一个关于极大值的命题，相应地就有一个关于极小值的命题. "如果三角形的面积一定，则当这个三角形是正三角形时周长最小"是相应的命题.

3. 统一性

数学美的统一性，是指数学中部分与部分、部分与整体之间的和谐一致.

数与形本是数学研究的两个独立的对象，对它们的研究，分别构成了代数与几何. 然而通过坐标系的建立，使点与数建立了对应，从而把代数研究的对象与几何研究的对象——方程与曲线联系了起来，实现了统一.

数学研究的内容浩如烟海，而依布尔巴基学派的观点来看，可以统一为代数结构、序结构和拓扑结构，这点已在第二章中叙述过了.

欧氏几何内容繁多、错综复杂、变化无穷，然而却可以统一在五组公理之下.

从数学发展的规律来看，数学的发展，将日益证明数学的统一性. 为了使庞大的数学体系变得简单而精确，数学家们经常依据数学各领域的共性，提出统一数学各部分的新观点、新理论. 算子理论、群论、拓扑理论都是相应的许多具体数学内容统一的结果. 公理化方法、结构思想就是从统一性目标出发而提出的建立

数学体系的方法.

4. 奇异性

奇异性是指结论的新颖奇巧、出乎意料,往往引起思想上的震动. 例如,毕达哥拉斯学派"认为整个的天是一个和谐,一个数目","认为十这个数目是一个完美的数目"(《古希腊罗马哲学》,三联书店). 这时所认识的数是自然数、有理数,认为有了这些数就足以表达一切量,除此以外再无别的数. 从而认为"数"是"和谐的",是万物的"始基". 不可公度量——无理数的发现,在当时无疑是一个奇异的结果,引起了人们极大的慌恐,后人称之为第一次数学危机.

在欧几里得几何占统治地位的时代,非欧几何的思想是奇异而荒诞的思想. 虽然德国数学家高斯在 1816 年左右就具有非欧几何的思想,但像他这样的大数学家,在当时也不敢公开这种奇异的想法,担心"黄蜂会围绕着他的耳朵飞". 1826 年俄国数学家罗巴切夫斯基才第一个公开地提出了非欧几何的理论.

奇异所造成的并不总是消极的影响,恰好相反,在它们中间常常孕育着新的巨大发展的可能性.

参考文献

1. M · 克莱因. 古今数学思想. 张理京译. 上海:上海科学技术出版社,1980

2. 李文林. 数学史概论. 北京:高等教育出版社,2005

3. 高隆昌. 数学及其认识. 北京:高等教育出版社,2005

4. 吴振奎,吴旻编著. 数学的创造. 上海:上海世纪出版集团,上海教育出版社出版,2003

5. 王仲春,李元中,顾蕾莉等. 数学思维与数学方法论. 北京:高等教育

出版社,1989

6. 王元明. 数学是什么. 南京:东南大学出版社,2003

7. [俄]亚历山大罗夫等. 数学——它的内容、方法和意义. 王元等译. 北京:科学出版社,2004

8. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:海洋大学出版社,2000

9. [美]李学数. 数学和数学家的故事. 北京:新华出版社,1999

10. R·柯朗,H·罗宾斯著. 数学是什么. 汪浩,朱昱民译. 长沙:湖南教育出版社,1985

11. 王子兴. 数学方法论. 长沙:中南大学出版社,2002

第四章　公理化

说起数学，人们往往都认为数学的可靠性、严谨性，是因为数学的逻辑性. 的确，数学科学具有逻辑性，拥有一套逻辑体系——形式逻辑符号等. 但其他学科（包括思辨学科）也具有各自的学科逻辑. 不同之处在于，数学的严谨性、可靠性不仅仅在于其逻辑性一个方面，而且还存在一整套保证逻辑顺序实施的手段——公理化体系.

一、数学需要公理化

古希腊时期引起一场数学危机. 原因是：毕达哥拉斯提出宇宙万物都是整数，但不可公度量的出现，重撞了毕氏理论. 因为两条等直角边的直角三角形的斜边长就是整数不可公度的线段，不可公度量的出现引起了数学第一次危机. 这一次数学危机后，人们反思：单凭直观、经验不可靠. 数学需要公理化.

数学被认为是研究现实世界的空间形式和数量关系的，而现代数学就是各种量之间可能的，一般说是各种变化着的量的关系和相互联系的数学. 很明确，数学不仅研究包括现实世界的各种空间形式和量的关系，而且包括一切可能的空间形式和数量关系. 针对这些关系结构只有证明其真实性，才具有可信性. 而证明需要采用逻辑推理方法；逻辑推理需要大前提. 若每步都需要有

个大前提，那么出现了最初始的那个大前提该如何办的问题. 同样，概念的定义必然也有这种情形，出现了原始概念无法定义的问题. 因此我们需要建立一门科学的严格的理论体系. 也就是说让该门学科的某些概念及其有关的某些关系作为不加定义的原始概念与公设或公理，以保证以后的全部概念与性质由这些原始概念、公设、公理理论基础上定义与逻辑演绎出来. 我们把这种从一组原始概念、公设、公理出发，运用逻辑原则，建立科学体系的方法叫公理化方法. 从数学发展的历史可知，数学是需要公理化方法的.

二、关于公理化

所谓公理化思想，并不要求建立严格的公理化系统，只要我们能在分析实际问题时，凭着需要随时能想到建立数学模型、作形式化处理，随时想到公理化方法，以使模型变得严格. 这种意义下，公理化思想就是公理化方法.

欧几里得《原本》是第一个企图用这种公理方法构建理论体系的著作. 在他的几何原本中就是用公理化对当时数学知识化、系统化的总结. 在全书 13 卷中，包括 5 个公理、5 个公设、119 个定义、465 条命题等.

1. 定义中的公理化方法

大家会注意到，数学的形式系统中所用到的定义，其叙述方式都是公理化的. 例如一般拓扑空间定义.

记 X 为一个集合，$\tau\subset 2^X$（X 的幂集），若满足：

(1) X、$\Phi\in\tau$；

(2) 任意有限个 $A_i\in\tau$，皆有 $\bigcap_i A_i\in\tau$；

(3) 任意多个 $A_i\in\tau$，皆有 $\bigcap_i A_i\in\tau$.

则叫 τ 做 X 的拓扑，叫 X 以 τ 为拓扑的一般拓扑空间，也叫做点

集拓扑空间，简称拓扑空间，记为(X,τ).

这里(1)(2)(3)即是其公理. 特别地，根据"公理就是约定、声明、限定"的含义，第一句中"记X为一个集合"和"$\tau\in 2^X$"也都是公理.

凡是公理化定义都可作为形式化系统的严格依据. 事实上，一般拓扑学正是建立在这一定义上的，因此这类定义的确具有公理化特征，叫做公理化定义.

与公理化定义对偶的另一类定义叫做描述性定义. 它不具有形式化系统的严格化，比如对"数学"本身的定义即是这类描述性定义，可以发现社会科学中还广泛存在描述性定义.

2. 数学理论中的定理、命题叙述都具有公理化形式

从广义上讲，数学中一般定理都是一些公理化形式系统. 它们的条件即是其公理，甚至因为定理(相对于它的结构)是个完备系统，其条件(公理)也自然满足协调性、独立性，因此还可说定理中的条件(公理)是个公理系统. 从而也说一个定理是个完备的形式系统. 例如微分中值定理(拉格朗日型).

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$使等式$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立.

这里的两个条件就是该形式系统的公理. 由于这里结论是能严格证明的，所以说这个建立在两个公理上的形式系统是完备的，从而所依赖的公理也构成公理系统. 不过严格地说，其中的符号也应该作独立地约定，因此也应该属于公理，与所指出的两个公理一起才构成公理系统.

该定理还可叙述成更加符号化的形式：若$f(x)\in C^0[a,b]$，且在(a,b)内可导，$\Rightarrow \exists\in(a,b)\ni f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 符号自明.

3. 一般的数学模型叙述都是公理化形式的

这里以经济学上数学模型为例.

例(1-4-1) 经济学上有名的 $C-D$ 生产函数为:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad \alpha+\beta = 1$$

式中

Q——生产量;

K——投入要素之一:资金;

L——投入要素之二:劳动;

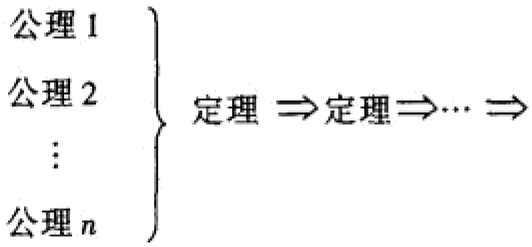
A——调节系数,表示科技进步等管理因素对生产的作用.

显然,从公理化意义上讲,各符号解释和两个等式都是公理,它们共同形成一个形式系统,也就是一个数学模型.

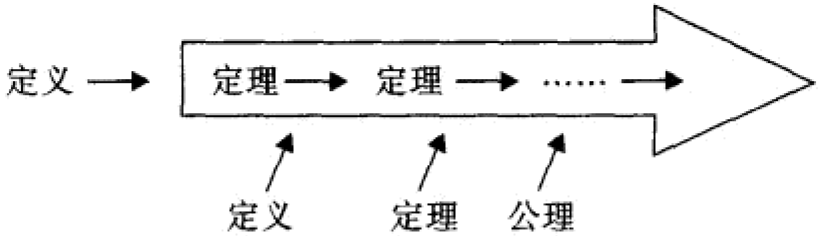
4. 广义地说,一切数学学科都是公理化的

因为一切数学学科都是由公理化的定义、公理化形式的定理、命题和随时需要而引入的新概念以及新的符号、约定、限制等,再加上推理过程而成的形式系统,因此可说成是建立在一系列的公理基础上的,所以说就是公理化的.但若这一系列公理不能事前一次给定,则很难论证它们间的协调、独立和完备性,所以不能轻易说它们是(严格意义上的)公理系统,而只能说是“公理化”的.

这里还应该看到,在数学中本质上任何一个定理都是由该学科中有关定义产生的结果,换句话说,数学中任何一个定理(或命题)都可经由有关定义推出,只是往往来得比较笨(繁琐、不经济)罢了.当能借用别的定理而获得结论时,往往比直接从定义出发更省事.例如,若由定义1推出了定理1,定理1推出了定理2,…,定理 $n-1$ 能推出定理 n,这时如让我们证明定理 n,则谁都知道直接用定理 $n-1$,而不必从定义1证起,其中任一个定理本质上都是定义1产生的.当然这只是一种“特征化”了的叙述,事实上理论过程是错综复杂的,上述实质并非一眼能看穿.如图1-4-1



(图甲)



(图乙)

图 1－4－1

图甲、图乙分别表述公理系统和一般形式下的理论系统.

5. 公理化方法的逻辑特征

公理化方法的作用在于从一组公理出发,以逻辑推理为工具,把某一范围系统内的真命题推演出来,从而使系统成为演绎体系,对于所选公理,一方面要求能从公理组推出该系统内的全部真命题;另一方面又要求从公理组不能推出逻辑矛盾;再就是希望所选公理个数最少. 这三个方面构成了公理化方法的逻辑要求,此也是判别一个公理系统是否科学合理的准则.

(1)无矛盾性(相容性或协调性)　无矛盾性要求在一个公理系统中,公理之间不能自相矛盾,由公理系统推出的结果也不能矛盾,即不能同时推出命题 A 与否定命题 $\overline{A}$,显然,这是对公理系统的最基本的要求.

如何证明给定的公理系统的无矛盾性呢? 如前述,想通过

“由这一公理系统作出全部可能的推论并指出其中没有矛盾”来证明是不可能的. 为此,人们创造了一种特殊方法即解释法或作模型法. 基本思想如下:将公理系统的每一不定义的概念与对象的某一集合相对应,而且要求对应于不同概念的集合没有公共元素,然后,使公理系 T 的每一关系对应着对应集合元素间的某一确定的关系. 所得的集合与关系的全体叫做解释域,公理系 T 的每一命题 A 可以用自然的方法对应于解释域中相应的命题 A^*. 如果所得的命题 A^* 为真,那么就称公理系 T 的命题 A 在这个解释下是真的,如果 A^* 为假,则 A 在这个解释下是假的,如果公理系 T 的全部公理在这个解释下均为真,那么这个解释称为所给公理系的模型.

解释域及其性质常常是另一数学理论 T' 本身,同样可以是公理化的,所以说,用解释法能证明公理系 T 的相对相容性,即能作出“如果 T' 相容,那么 T 也相容”的判断,即是说解释法实质上是将一个公理系统的无矛盾性证明化归为另一个公理系统的无矛盾性的证明,是一种间接证明. 解析几何可以看成是实数系统中欧氏几何的一个解释模型,于是欧氏几何相容性证明转化为实数系统的无矛盾性证明,而实数系统可以建立在 ZFC 公理化集合论的基础上,因此,实数系统的无矛盾性又化归为集合论的无矛盾性证明,而后者经过几代数学家们的努力,至今尚未得到彻底解决.

(2)独立性　独立性要求在一个公理系统中,被选定的公理组中任何一个公理都不能由其他公理推出.

独立性其实要求的是公理组中公理之间不能有依从关系,若某一公理被其余公理推出,那它实质上就是一个定理,在公理组中就是多余的,所以,独立性要求公理组中公理数目最少.

利用解释法同样可以证明所给公理系的独立性问题,所谓公理系 T 中公理 A 的独立性无非是指 A 由其他公理既不能证实,也不能否定. 因此,建立一个新的公理系,就是将公理 A 换成它的否

定 A 而其他公理保持不变,只要能证明新的公理系是相容的,就可断言 A 在公理系 T 中独立,从而将独立性问题化归为相容性证明问题,而新公理系相容性证明可用解释法,欧氏第五公设的独立性由非欧几何的相容性得到证明就是一例.

(3)完备性　完备性要求在一个公理系统中,公理组的选取能保证由公理组推出该系统的全部真命题,所以,公理不能过少,否则就推不出某些真命题,这是关于完备性的古典定义.

现代数学常借助模型的同构给公理系的完备性下定义,即如果公理系 T 的所有模型或解释都彼此同构,就称这个公理系是完备的. 所谓模型的同构是指这个公理系的两个模型 (X,R) 与 (Y,S) (这是为简便计,假设给定的公理系中只有一个不定义的概念和一个不定义的关系. X 与 Y 是某两个集合,R 与 S 分别是这两个集合中的关系)间存在一个双射 $\varphi: X \to Y$,使 $x_1 R x_2$,当且仅当 $y_1 S y_2$ 时成立,其中 $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$.

在上述公理化方法的 3 个特征中,无矛盾性是最重要而又是非有不可的. 独立性从理论上讲,从完美简练上讲,应该要求,因为公理和定理在整个系统中处的地位不同,公理是出发点,定理是推出的,不能混在一块. 但是,即便是把一个定理不加证明地作为公理也不会出现什么“原则”错误,不会使公理系统产生矛盾,也不会影响公理体系的完备性,而且从数学角度讲,根据学生的心理发展水平适当将某些定理当作公理对待还可能有利于学生接受,因此,独立性要求有时可降低. 如:“平行同一直线的两直线平行”在立体几何中把它写作公理,现行中学几何体系就放弃了这一要求. 至于完备性,要求就大大放宽了.

6. 公理化理论系统与其相应的具体模型

(1)理论系统的结构层次

1)符号集:

逻辑符号:“$\vee$”、“$\wedge$”、“$\neg$”、“$\exists$”、“$\forall$”等.

非逻辑符号：指称对象的符号，如 x、y 等，指称关系的符号如 f、g、F、R、G 等.

2）形成规则：由符号构成公式或有意义的符号串的规则.

3）公理组（包括逻辑公理和非逻辑公理）.

4）推演规则（包括逻辑和非逻辑推演规则），即由已知公式（公理和定理的符号表示）推出新的公式应遵守的基本规则.

（2）理论与其相适应的模型的关系　上述四条及其由它们推出的全部定理构成一个理论系统，一般用 T 表示，其中对象集与关系集称为理论 T 的形式系统，用 $L(T)$ 表示.

对理论 T 的任何一个解释（赋值）称为 T 的一个模型，也就是说理论相对于模型而言，理论是抽象（虚）的，而模型是具体（实）的，一个理论可以有很多相应的模型. 下面举两个简单例子加以说明.

例（1－4－2）　$L(T):(S,R)$,

$$L_1:(xRx),$$

$$L_2:(xRy)\wedge(yRz)\longrightarrow xRz.$$

其中 S 是对象集，R 是关系，L_1、L_2 是两条公理. 如果在上述理论 T 中，将 R 解释成大小关系"$\leqslant$"，那么，实数集的任何一个子集都满足 L_1 与 L_2. 也就是说，实数集的任何一个子集都有资格充当 $L(T)$ 的对象. 从而实数集的任何一个子集都是理论 T 的模型. 倘若在上述理论 T 中，将 R 解释成集合论中的包含关系"$\subseteq$"，那么，实数集的所有子集，即实数的幂集就是理论 T 的一个模型，而且实数系的幂集的任何一个子集皆是理论 T 的模型.

例（1－4－3）　$L(T):[S,R]$,

$$L_1:(xRy)Rz = xR(yRz),$$

$$L_2:\exists z[\forall x(xRz) = x],$$

$$L_3:\exists z[\forall x\exists y(xRz) = z].$$

这是大家所熟悉的群的形式公理系统. 如果给 R 以不同解释

(当然要满足公理 L_1, L_2, L_3)，则可构成不同的模型，而且在形式系统中，即在一个理论系统中任何一个定理对其相应的所有模型皆真.

(3)原型、模型理论三者结构框图　模型与理论的关系是具体与抽象、特殊与一般的关系，但是具体与抽象是相对的有层次性. 比如，模型相对于理论而言就是具体，而相对于原型而言就变成抽象的了. 为了显示原型、数学模型、数学理论三者之间的内在相互关系，请看图 1-4-2 结构层次框图：

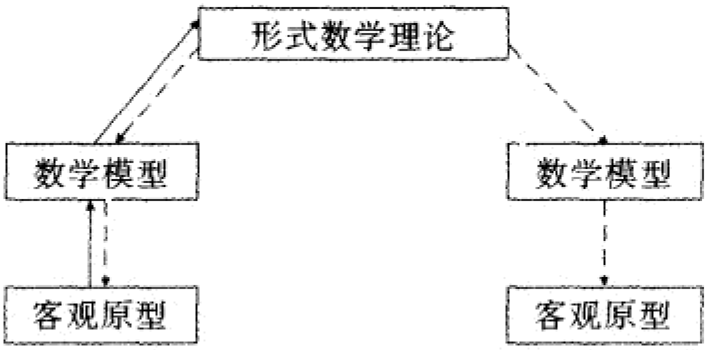


图 1-4-2　结构层次框图

上述框图中实线表示理论来自实践(客观原型)，虚线表示理论对实践的指导作用.

7. 公理体系举例

(1)欧几里得几何《原本》　这是第一次用公理化写成的经典著作，是数学史上的一座丰碑. 著作中用公理化对当时的数学知识系统化、理论化，是历史上第一个公理体系.

5 条公设：①假定从任一点到任意一点可作一直线. ②一条有限直线可无限延长. ③以任意中心和直径可以画图. ④凡直角都相等. ⑤若一直线在两直线上所构成的同旁内角之和小于两直角(180°)，那么两直线无限延长，它们将在同旁内角和小于两直角

的一侧相交.

5 条公理:①等于同量的量彼此相等. ②等量加等量和相等. ③等量减等量差相等. ④彼此重合的图形相等. ⑤整体大于部分.

(2)希尔伯特公理化体系——《几何学基础》　希尔伯特 1898~1899 年完成历史性著作《几何学基础》,这是在 19 世纪中叶以后罗巴切夫斯基几何和黎曼几何影响下形成的思想. 这也是 19 世纪后半叶数学大发展的形势影响的结果.

希尔伯特分析了欧几里得公理,取其长,补其短,在此基础上提出一套 5 组 20 条公理组成的公理体系,关联公理(8 个)、顺序公理(4 个)、合同公理(5 个)、平行公理(1 个)、连续公理(两个). 其公理体系满足:协调、独立性和完备性.

希氏公理与欧氏公理比较后可以发现,希氏的公理化思想较之古典公理化思想,更完善更抽象. 今天将其称为现代公理化系统(简称公理系统). 需要说明:公理化系统只是公理化方法中一种典型的、严格的形式,并非所有公理化过程,都能得到公理化系统. 因此,公理化系统和公理化的概念是有区别的.

(3)集合论的公理系统(略)

(4)公理化系统思想广泛运用　受公理化系统思想的启发,现代数学中创立了公理集合论就是一例,其他科学也接受公理化系统思想,开始建立本学科的公理化系统. 比如前面提到数理经济学.

参考文献

1. 高隆昌. 数学及其认识. 北京:高等数学出版社,2005
2. 钱佩玲. 数学思想方法与中学数学. 北京:北京师范大出版社,2001
3. 吴振奎,吴旻. 数学的创造. 上海:上海教育出版社,2003

4. 王元明. 数学是什么. 南京:东南大学出版社,2003

5. R·柯朗,H·罗宾斯著. 数学是什么. 汪浩,朱昱民译. 长沙:湖南教育出版社,1985

6. 王子兴. 数学方法论. 长沙:中南大学出版社,2002

7. 李文林. 数学史概论. 北京:高等教育出版社,2005

8. 贝尔. 数学精英. 徐源译. 北京:商务印书馆,1994

9. [俄]亚历山大罗夫. 数学——它的内容方法和意义. 王元译. 北京:科学出版社,2004

10. 王仲春,李元中,顾莉蕾等. 数学思维与数学方法论. 北京:高等教育出版社,1989

11. 关成志主编. 数学思维概论. 沈阳:辽宁教育出版社,1993

第五章　数学的扩张

像人类认识世界一样，数学也是"由低级向高级发展的"．即"由浅入深，由片面到更多的方面"（毛泽东）；数学就是在不断的发现和发展中成长的．本章就数学的扩张进行粗略的介绍．

§1　数学的发现和创造

一、数学的产生和发展同生活、生产的联系

（1）古代巴比伦人，由于从事商业活动、挖河修堤、丈量土地等，他们需要兑换钱币和交换商品，计算单利和复利，划分土地和遗产，给农人、教会、国家分配粮食．他们发明了文字，创造了加、减、乘、除的运算和面积计算公式，如：三角形相似的认识和三角形对应边成比例的性质；如用3代替π；如在代数上数与倒数之积是1；如解形如$x^2-bx+1=0$的方程的根为$\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$等．数学的产生与发展同生活需要联系密切．

（2）在亚历山大时期的希腊的三角学的产生：由于人们企图以定量的天文学，来预报天体的运行路线和位置以帮助报时、计算日期、航海和研究地理而产生了三角学．这门学科是希帕古斯

(Hipparchus)、梅内劳斯(Menelaus)、托勒玫(Ptolemy)创立的,托勒玫把圆周分成360°,把一个直径分成120等份,圆周和直径每一个每一分度再分成60等份,于是,可以由一定度数的给定的弧AB长,得出相应弦AB的长度数. 希腊三角术在梅内劳斯时到达顶点,他的著作是《球面学》:对球面的三角形证明了那些类同于平面三角形的定理,如三角形两边之和大于第三边,球面三角形内角之和大于两直角,球面三角形的等边对等角,他还证明了不类同于平面三角形的一些定理和一系列公式. 托勒玫还在他的《数学汇编里》把天文和三角混在一起,试图把天文学建立在"不容置辩的算术和几何方法"的基础上,这已显示出数学扩张的企图. 其他学科的发展需要数学的支持,为数学的发展提供了条件.

(3)20世纪中叶,爆发第二次世界大战. 为了战争的需要和战事的胜利,产生了运筹学. 运筹学在战后,运用于民用领域. 随着发展,应用数学和计算机一起成为一门学科,为决策优化提供理论和方法. 可见数学已渗透到军事和民用、管理科学中.

二、数学的发展与其他科学的联系

(1)数学与天文、航海和农业等的联系,产生了早期的几何、代数、算术等.

(2)微积分的产生是与科学发展相联系的:17世纪上半叶,天文、力学等领域发生了一系列重大事件. 1608年荷兰人帕席发明了望远镜和伽利略的第一台天文望远镜,推动了光学和天文学的发展. 1619年,开普勒公布了行星运动的三大定律:①行星运动轨迹是椭圆,太阳位于该椭圆的一个焦点;②由太阳到行星的矢径相等的时间扫过的面积相等;③行星绕太阳公转周期的平方,与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比. 从此数学上推证开普勒的经验定律,成为自然科学的中心课题. 1638年伽利略建立了自由落体定律、动量定律、对弹道曲线的认识等,激起了人们对这些新

的概念和理论作以精确数学表述的巨大热情.

这一段时间内自然科学进入了综合和突破阶段,而这些突破面临着一系列数学困难:如非匀速运动物体的速度和加速度构成的瞬时变化率问题;曲面上任一点的法线和切线问题;弹道曲线的最大射程和寻求远日点、近日点所涉及的函数极大值、函数极小值问题;行星运动的路程,行星直径扫过的面积等有关面积、体积、曲线长、重心和引力的计算,引起人们对数学提供支持的期盼,于是在牛顿、莱布尼茨等先哲们努力下,微积分问世了.

(3)微分方程与物理问题有着密切的关系,其中一类是弹性理论:一个物体如果在外力作用下变形,而外力移去之后又恢复原状. 这里又使人们联想到直梁与水平梁在外加负荷下形成的形状. 梁的状态的研究,引导帕斯卡发现了定律:一个被伸长或被压缩的恢复力,正比于它伸长或缩短的相对长度. 紧接着:一根挂在两固定点的非弹性软细绳所形成的形状;一根固定在两端的弹性振动弦所成的形状又等待着数学去研究. 另一类关于摆的问题:圆周摆的精确微分方程$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$. 关于摆的问题联系着18世纪两项重要的研究:地球的形状和引力的平方成反比定律的验证. 这些刺激着数学对微分方程的研究.

达朗贝尔对弦振动等力学问题的研究,所作的《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》开启偏微分方程一门新分支. 他明确地推导出了弦振动所满足的偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$并给出了形如$\mu(t,x)=\varphi(x+t)+\Psi(x-t)$的通解. 欧拉也沿用了达朗贝尔的方法,在《论弦的振动》中引进了正弦级数:

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\text{的特解}\mu(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

(4)数学对原有数学理论的扩张.

1）从复数到四元数. 关于对复数的突破，伽罗瓦对解决 n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的 n 个根进行置换，置换的全体构成一个集合（其中两个置换的乘积是集合中的一个置换），伽罗瓦称之为“群”. 由于伽罗瓦群的概念的出现和在高斯、韦塞尔、阿尔岡给出了复数的几何表示后，使复数的合法地位确立，在此基础上数学家认识到复数表示和研究平面上向量的功能之后，为了能处理几个力作用在同一物体时，这些力不在一个平面上，为在代数上处理这些问题，就需要复数的一个类似物，很容易用笛卡儿三维坐标（x、y、z）表示向量，设想用三元数组运算表示向量运算. 哈密顿进一步考虑一种三元数组作为复数的三维类似物，终于发现四个分量的新数，而且放弃交换性，他把这种数命名为四元数. 于是四元数出现，四元数形如 $a+bi+cj+dk$（其中 a、b、c、d 为实数），i、j、k 满足：

$i^2=j^2=k^2=-1, ij=-ji=k, jk=-ji=i,$
$ki=-ik=j.$

若 $p=a+bi+cj+dk, q=t+mi+nj+lk$ （其中 a、b、c、d、t、m、n、l 均为实数）.

并且发现 $pq\neq qp$.

2）超复数的出现. 哈密顿之后，各种新的超复数涌现出来，其中格拉斯曼对复数的推广更为大胆，他涉及到了 n 维向量空间，在他的《线性扩张论》中提出了“扩张的量”的概念. “扩张的量”就是一种有 n 个分量的超复数，如 $n=3$ 时，考虑两个超复数

$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3, \beta=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$ （a_i，b_i 是实数）.

加减法：$\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2+(a_3+b_3)e_3.$

内积（或 · 积）$ei\mid ei=1 \quad ei\mid ej=0 \quad (i\neq j).$

$\alpha\mid\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 且 $\alpha\mid\beta=\beta\mid\alpha.$

外积（或 × 积）$[eiei]=0 \quad [eiej]=-[ejei](i\neq j).$

$$[\alpha\beta] = (a_2b_3 - a_3b_2)[e_2e_3] + (a_3b_1 - a_1b_3)[e_3e_1] + (a_1b_2 - a_2b_1)[e_1e_2].$$

$$[\alpha\beta] \neq [\beta\alpha].$$

格拉斯曼还研究了混合积，他的工作和他的超复数一定程度上满足了物理学的需要，但四元数不适合物理学的需要. 英国数学物理学家麦克斯韦将四元数进行改选，把它分为数量部分和向量部分，如一个四元数 $a+bi+cj+dk$，a 是数量部分，$bi+cj+dk$ 是向量部分. 19 世纪 80 年代美国物理学家吉布斯和英国数学物理学家亥维赛创立了独立于四元数的三维向量代数和向量分析，如向量 $V = ai+bj+ck$. i、j、k 是 x、y、z 轴的单位向量，a、b、c 是 3 个实数，称为向量的分量. 向量的和是向量，向量的和等于它们相应分量的和. 设 $m = a_1i+a_2j+a_3k, n = b_1i+b_2j+b_3k$.

向量$(m \pm n) = (a_1 \pm b_1)i + (a_2 \pm b_2)j = (a_3 \pm b_3)k$.

向量的内积(或 · 积)满足 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, i \cdot j = j \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = i \cdot k = k \cdot i = 0$.

$$m \cdot n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

向量的外积(或 × 积)满足：$i \times i = j \times j = k \times k = 0, i \times j = k, j \times i = -k, j \times k = i, k \times j = -i, k \times i = j, i \times k = -j$.

$$m \times n = (a_2b_3 - b_2a_3)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

向量外积不满足交换律，矩阵量不满足乘法交换律的又一代数对象的例子. 我们可以看到数学中，由复数→四元数→超复数→矩阵的扩张. 这是在数学理论方面的扩张.

三、欧几里得几何向非欧几何的扩张

欧几里得的《几何》是世界科学史上的一座丰碑，对数学思想

的发展有着巨大的贡献. 但是高斯在前人工作的基础上，意识到欧氏中的平行公设不能从其他的欧几里得公理中推出来. 于是他开始对平行公设不成立的研究，他率先提出了“反欧几里得几何”，后改为“非欧几里得几何”，因此“非欧几何”来自高斯. 但非欧几何的真正发明者是罗巴切夫斯基、高斯、波约，罗巴切夫斯基首先发表了自己的著作，高斯的理论是在其遗稿中发现的.

关于非欧几里得几何讨论的问题是：

设给定了直线 a 和直线外一点 A，由 A 向 a 作 $AB \perp a$，B 是垂足，按照罗巴切夫斯基的基本假设，至少存在两条直线 b、b' 皆过 A 点，且不与直线 a 相交（如图 1－5－1），罗巴切夫斯基研究了通过 A 且不与 a 相交的直线的极限情形，指出这样的极限直线有两条 c 与 c'，并证明它们与 a 不相交. 因此 c 与 c' 构成了不与 a 相交的直线的边界，在这两条直线（c 与 c'）所夹角内的过 A 的所有直线不与 a 相交. 将 β 的一半 $\frac{\beta}{2}$ 叫平行角. 从这里得到一系列理论.

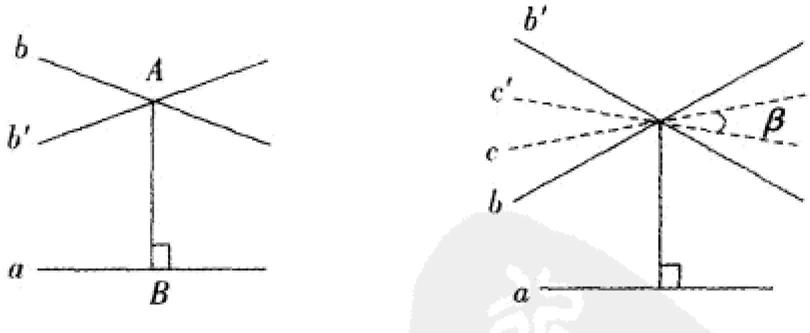


图 1－5－1

黎曼发展了罗巴切夫斯基等人的思想建立了一种更为广泛的全新的几何——黎曼几何. 在黎曼几何中，罗巴切夫斯基几何和欧几里得几何只是其中的一部分. 黎曼的研究是以高斯关于曲面内蕴微分几何为基础的. 黎曼在《关于几何基础的假设》中将欧氏空间中曲面的内蕴几何推广到任意空间的内蕴几何，他把 n 维

空间称作一个流形，n 维流形中的一个点，可以用几个参数 x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$ 一组特定值表示，这些参数叫流形坐标.

黎曼从定义两个邻近点的距离出发，假定这个微小距离的平方是一个二次微分齐次式：

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \mathrm{d}_{xi} \mathrm{d}_{xj}$$

其中 g_{ij} 是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，$g_{ij} = g_{ji}$，这个表达式称为“黎曼度量”. 黎曼还定义了曲线的长度，两曲线在一点的交角等.

黎曼几何最重要的一种对象即为所谓的常曲率空间，对于三维空间，有三种情形：Ⅰ）曲率为正常数；Ⅱ）曲率为负常数；Ⅲ）曲率恒为零.

黎曼几何是第二种非欧几何.

黎曼几何区分了“无限”与“无界”两个概念. 在黎曼之前，认为钝角假设与直线可以无限延长的假定矛盾，因而取消了这个假设. 但黎曼区分了“无限”、“无界”两个概念，认为直线可以无限延长，并不意味着其长短是无限的，只不过它是无端或无界的，在这两个概念界定之后，人们可以像锐角假设一样无矛盾地展开一种几何. 这一种黎曼几何或椭圆几何——称为第二种非欧几何. 作为区别，数学史上把罗巴切夫斯基的非欧几何叫罗巴切夫斯基几何或双曲几何. 普通球面上的几何就是黎曼非欧几何，其上的每个大圆可看作一条“直线”，容易看出，任意球面“直线”都不可能永不相交如图 1－5－2.

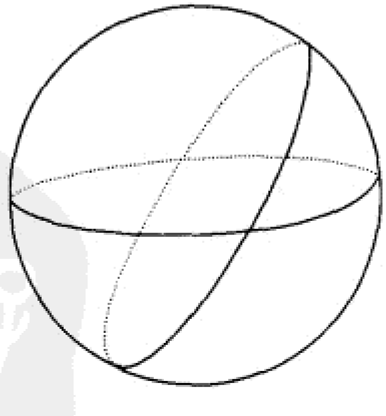


图 1－5－2

由欧几里得几何→高斯的非欧几何→罗巴切夫斯基几何双曲几何→黎曼几何（椭圆几何），数学学科内容进行了一系列扩张并仍在扩张.

四、集合论的出现

数学的严格基础，自古以来就是数学家追求的目标，但 20 世纪以前数学曾经历过两次巨大的考验. 17、18 世纪关于微积分基础的争论，催生了 19 世纪末分析严格化的最高成就——集合论.

牛顿、莱布尼茨创立微积分，是数学史上又一座丰碑. 但由于初始阶段的理论不严格，导致了微积分概念混乱，特别是无穷小概念方面的随意和混乱. 荷兰人纽汶蒂在《无穷小分析》中指责牛顿的流数术叙述“模糊不清”，莱布尼茨的高阶微分“缺乏根据”. 对于“首末比方法”中为求幂函数 x^n 的流数，牛顿假设 x 有一个增量 o，以去除 $(x+o)^n-x^n$ 的差. 由此可得 $nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o$ $+\cdots\cdots$然后使含 o 的项清去. 对此伯克莱指责为“分明的诡辩”，他讥讽说：“这些消失的增量是什么呢？它们既不是有限量，也不是无限小，又不是零，难道我们不能称他们为消失量的鬼魂吗?”后来由于达朗贝尔、欧拉、拉格朗日的工作，使无限小的概念得以明确. 由于数学中争论，人们期盼着数学的分析严格化，一劳永逸地摆脱这种类似的危机. 1831 年高斯也表达了他对“实际无穷的恐惧”，“我反对把无穷量作为一个完满的东西来使用，在数学中决不允许有这样的用法. 无穷只是一种说话方式，真正意义是一些比值，在其他一些比值被无限增加时，无限趋近的极限. ”这样 x 表示一个实数，那么当 x 增加时，$\frac{1}{x}$减小. 我们能够找到一个 x 值，使$\frac{1}{x}-0$ 差为任意预先给定的量. 该量可以任意的小，当继续增加时，差保持小于预先给定的量. 这时$\frac{1}{x}$的极限为零，无穷的符号 ∞，$\frac{1}{\infty}=0$ 的论断的理由是无意义的.“用无穷去除”是一个不明

确的运算，因此没有意义. 康托尔既不同意又同意高斯的见解. 说："尽管在潜在无穷和实在无穷之间有本质差别，前者意味着一个增加到超出所有有限的限制的可变有限量，而后者则是所有有限量的固定的常量. 因而它们被混淆了."

这些连同"芝诺的三个问题"，都是"无穷小、无穷和连续的问题"，维尔斯特拉斯、戴德金和康托尔解决了它们. 但最后是康托尔解决了它们. ①康托尔证明了全体有理整数 1、2、3…的集合与"无限地包含更广泛"的全体代数数的集合，包含着恰恰同样多的元素. ②由伽利略的全体正整数平方的集合和全体正整数的集合例子：

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2, \cdots, n^2 \cdots$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4, \cdots, n \cdots$$

康托尔给出了一个论断：一个集合的一部分可以有与整个集合同样的数. ③康托尔为基数下定义. ④康托尔回答了"有多少超越数"的问题：全体超越数的类（或集），不相似于全体有理整数的类（集），超越数比整数的无限多得多等. 集合论对于数学基础更深入的探讨和由此引起数理逻辑的发展，成为 20 世纪的又一个重要的新趋势.

§2 推广的举例及方式

一、关于推广的几个举例

一些定理和数学问题是数学上的一个重要定理. 由于其重要且用途广泛，在应用中，这些定理不断推广. 因此，推广是数学扩张的又一特征. 今举几例：

1. 勾股定理的推广

勾股定理的推广详见图 1－5－3.

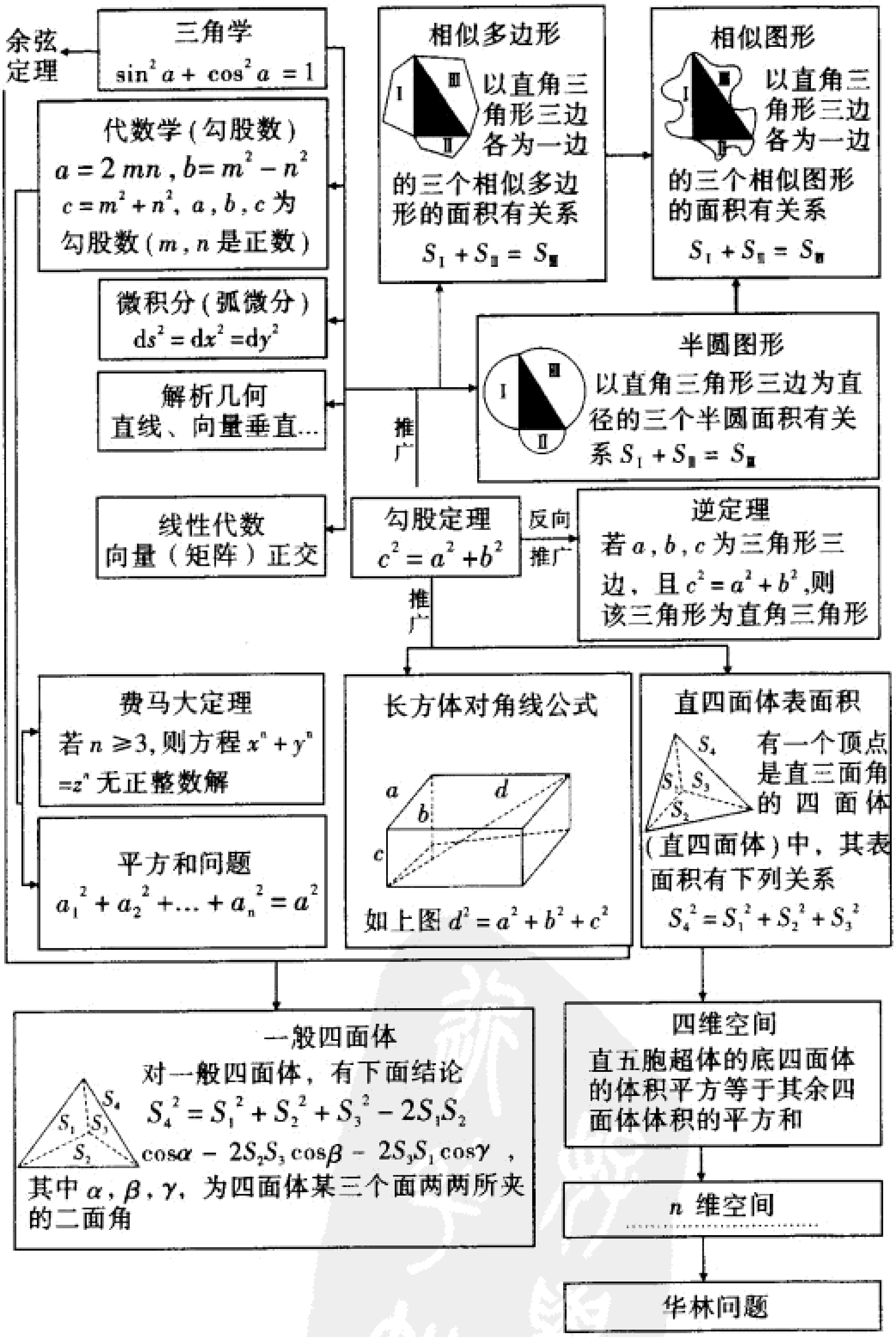

余弦定理
三角学
sin²α + cos²α = 1
代数学（勾股数）
a = 2mn，b = m² − n²
c = m² + n²，a，b，c 为勾股数（m，n 是正数）
微积分（弧微分）
ds² = dx² = dy²
解析几何
直线、向量垂直…
线性代数
向量（矩阵）正交
相似多边形
以直角三角形三边各为一边的三个相似多边形的面积有关系
S_I + S_II = S_III
相似图形
以直角三角形三边各为一边的三个相似图形的面积有关系
S_I + S_II = S_III
半圆图形
以直角三角形三边为直径的三个半圆面积有关系 S_I + S_II = S_III
推广
勾股定理
c² = a² + b²
反向
推广
逆定理
若 a，b，c 为三角形三边，且 c² = a² + b²，则该三角形为直角三角形
推广
费马大定理
若 n ≥3，则方程 xⁿ + yⁿ = zⁿ 无正整数解
平方和问题
a₁² + a₂² +… + aₙ² = a²
长方体对角线公式
如上图 d² = a² + b² + c²
直四面体表面积
有一个顶点是直三面角的四面体（直四面体）中，其表面积有下列关系
S₄² = S₁² + S₂² + S₃²
一般四面体
对一般四面体，有下面结论
S₄² = S₁² + S₂² + S₃² − 2S₁S₂ cosα − 2S₂S₃ cosβ − 2S₃S₁ cosγ，
其中 α，β，γ，为四面体某三个面两两所夹的二面角
四维空间
直五胞超体的底四面体的体积平方等于其余四面体体积的平方和
n 维空间
……
华林问题

图 1－5－3

2. **多角数问题**

多角数问题的推广见图 1－5－4.

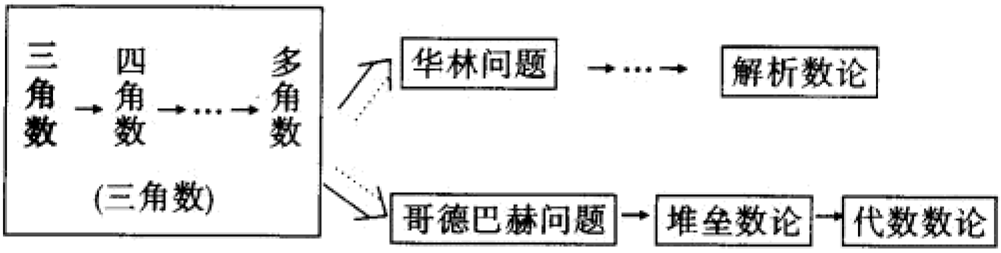


图 1－5－4

3. **方程问题**

方程问题的推广见图 1－5－5.

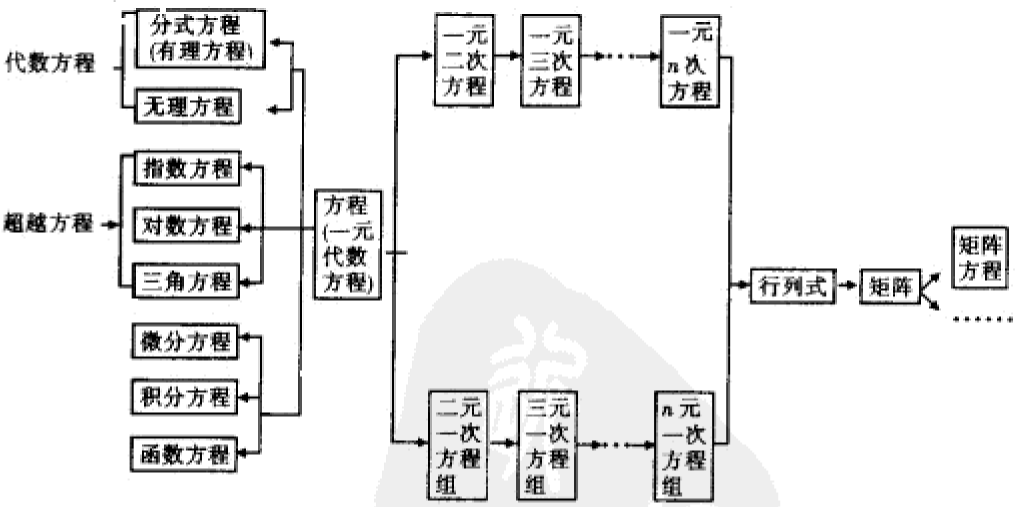


图 1－5－5

4. 关于匹多($D \cdot Pedoe$)不等式的推广

匹多不等式的推广见图 1－5－6.

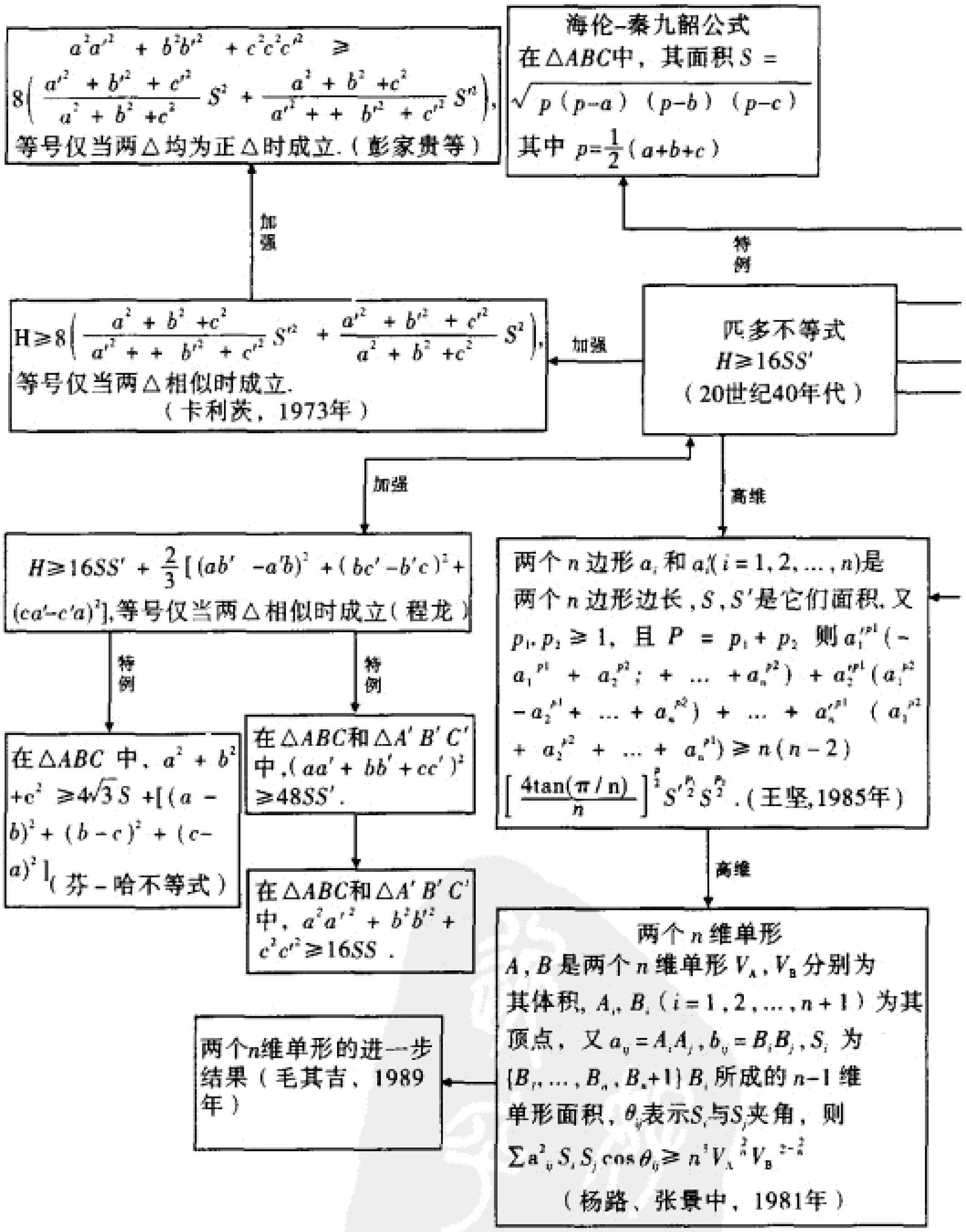
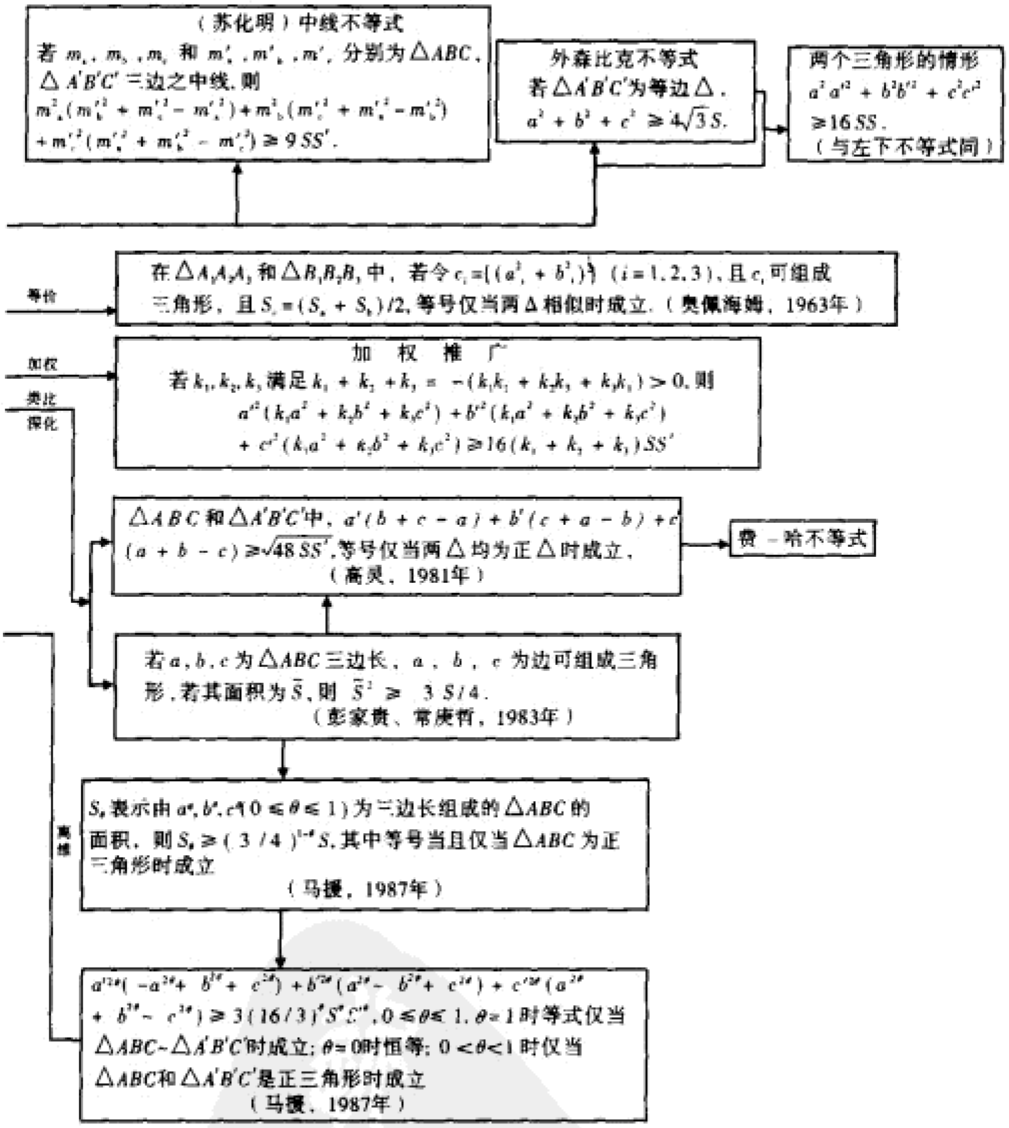


图 1－5－6(a)



（苏化明）中线不等式
若 m_a, m_b, m_c 和 m'_a, m'_b, m'_c 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 三边之中线，则
$m_a^2(m_b'^2+m_c'^2-m_a'^2)+m_b^2(m_c'^2+m_a'^2-m_b'^2)+m_c^2(m_a'^2+m_b'^2-m_c'^2)\geqslant 9SS'$.
外森比克不等式
若 $\triangle A'B'C'$ 为等边 $\triangle$，
$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$.
两个三角形的情形
$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2\geqslant 16SS'$.
（与左下不等式同）
等价
在 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 中，若令 $c_i=[(a_i^2+b_i^2)]^{\frac{1}{2}}$ $(i=1,2,3)$，且 c_i 可组成三角形，且 $S_c=(S_a+S_b)/2$，等号仅当两 Δ 相似时成立.（奥佩海姆，1963年）
加权
加 权 推 广
若 k_1, k_2, k_3 满足 $k_1+k_2+k_3=-(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)>0$，则
$a'^2(k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2)+b'^2(k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2)+c'^2(k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2)\geqslant 16(k_1+k_2+k_3)SS'$
类比
深化
$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$a'(b+c-a)+b'(c+a-b)+c'(a+b-c)\geqslant\sqrt{48SS'}$，等号仅当两 $\triangle$ 均为正 $\triangle$ 时成立.
（高灵，1981年）
费－哈不等式
若 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 三边长，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 为边可组成三角形，若其面积为 $\bar{S}$，则 $\bar{S}^2\geqslant\sqrt{3}S/4$.
（彭家贵、常庚哲，1983年）
S_θ 表示由 $a^\theta, b^\theta, c^\theta(0\leqslant\theta\leqslant 1)$ 为三边长组成的 $\triangle ABC$ 的面积，则 $S_\theta\geqslant(\sqrt{3}/4)^{1-\theta}S^\theta$，其中等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立
（马援，1987年）
高维
$a'^{2\theta}(-a^{2\theta}+b^{2\theta}+c^{2\theta})+b'^{2\theta}(a^{2\theta}-b^{2\theta}+c^{2\theta})+c'^{2\theta}(a^{2\theta}+b^{2\theta}-c^{2\theta})\geqslant 3(16/3)^\theta S^\theta S'^\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$. $\theta=1$ 时等式仅当 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$ 时成立；$\theta=0$ 时恒等；$0<\theta<1$ 时仅当 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是正三角形时成立
（马援，1987年）

图 1－5－6(b)

5. 微积分

微积分的推广见图 1－5－7.

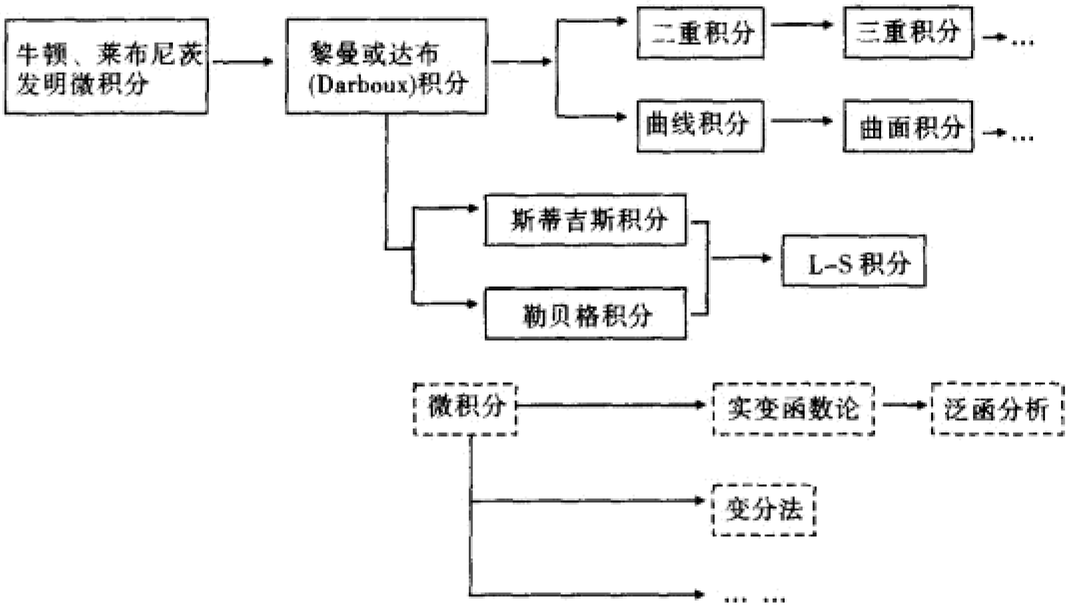


图 1－5－7

二、推广的方式和途径

吴振奎先生对数学推广的方式和途径的描述见图 1－5－8.

- 推广
  - 向高维推广
    - 从 1,2,3,…到 n
    - 从平面到立体
    - 从一维空间到二维…n 维空间
  - 向问题的纵深推广（弱化条件，强化结论）
  - 类比、横向推广
  - 反向推广
  - 联合推广

图 1－5－8

推广常用的方法是：类比法、归纳法.

下面我们先来粗略地谈谈推广的路子和方法.

1. 向高维推广

如在代数中，常常用到的推广是从 1,2,…n（比如方次，变元个数，…）（⇒表示推广）.

如在几何中的推广：

三角形⇒四边形⇒…⇒n 边形；

直线形（或圆）⇒多面体（或球），平面（二维）⇒立体（三维）⇒n 维空间.

如在三角学中的推广：

两角和（差）（或二倍角）问题⇒三个角和（差）（或三倍角）问题⇒…⇒n 个角和（差）（或 n 倍角）问题.

如在微积分中，常常遇到的推广：

一元⇒二元⇒…⇒n 元；

一阶（重）⇒二阶（重）⇒…⇒n 阶（重）；

……

2. 向纵深推广

比如结论在成立的范围(条件)可作如下推广.

(1)在代数(或分析)中结论成立范围的推广方向:

自然数⇒整数⇒有理数⇒实数⇒复数⇒…

(2)在几何中结论成立范围的推广方向:

特殊直线形(直角三角形、等腰三角形、等边三角形……)⇒一般直线形(一般三角形)…

圆⇒椭圆⇒圆锥曲线.

(3)在三角学中结论成立范围的推广方向:

特殊角⇒小于360°的角⇒大于360°的角⇒负角……

(4)在微积分中,比如微分中值定理的推广:

罗尔(M. Rolle)定理⇒拉格朗日定理⇒柯西定理⇒……⇒泰勒(B. Taylor)展开.

向问题的纵深推广,还包括弱化命题条件、强化命题结论这样一个内容.

从某种意义上讲,前面所述的情况,表现为"弱化条件",此外再如不等式改进(加强、隔离、除去符号……):

$\geqslant$(或$\leqslant$)⇒$>$(或$<$ $=$);

$\geqslant a$(或$\leqslant c$)⇒$\geqslant b$(或$\leqslant d$),这里 $a<b(c>d)$.

将结论成立的条件削弱,如微积分中函数可积条件改进:

连续⇒有限个间断点⇒可数个间断点;

命题对特殊函数成立⇒结论对一般函数成立等.

3. 类比、横向推广

这类推广又可分为两种:①同学科的类比;②不同学科的类比. 例如几何(平面与立体几何)间的类比见图1-5-9.

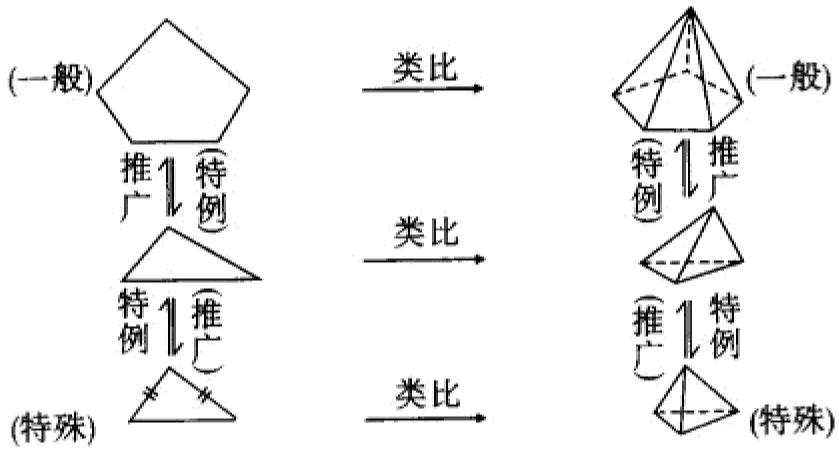


图 1-5-9

不同学科(代数、几何、三角)间的类比见图 1-5-10.

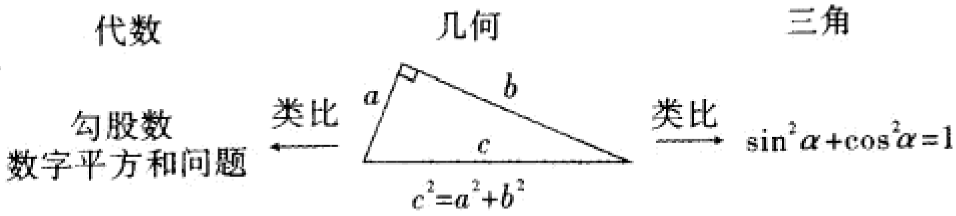


图 1-5-10

又如代数、三角、几何、积分、…等式或不等式间的类比见图1-5-11.

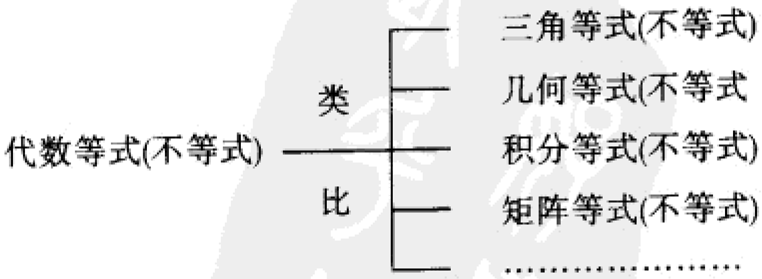


图 1-5-11

此外，还有物理与数学的模仿或类比等等.

4. 反向推广

我们知道：加与减、乘与除、乘方与开方、指数与对数、微分与积分……均互为逆运算，更一般的可看作互为反问题. 反问题中当然包括逆命题，这也便是所谓寻找命题成立的充要条件.

反问题的研究也是现代的数学家们研究问题的一种重要思维方法. 此外，还有所谓对偶问题（如三角函数中的正、余弦等）也可视为同类.

5. 联合推广

是将上面各种推广的几种方式或部分联合起来进行推广.

§3 数学向其他科学的扩张

数学不但与自然科学关系密切，在社会科学领域也有广泛应用. 随着数学向这些科学的渗透和扩张，随之出现了数学物理、生物数学与数理经济学、数理语言学等.

一、数学向物理学的扩张

物理和数学的关系由来已久，18 世纪是数学与经典力学结合的黄金时期，19 世纪数学在电学和电磁学的应用，在剑桥学派的工作下形成了数学物理分支，马克斯韦在 1864 年利用偏微方程推导了电磁场方程：

$$\mathrm{rot}H = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial}.$$

$$\mathrm{rot}E = \frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H)}{\partial t}.$$

$$\mathrm{div}\varepsilon\sum = \rho.$$

$$\mathrm{div}\mu H = o.$$

正是这组方程的研究，预言了电磁波的存在. 给科学和技术带来了巨大的冲击. 数学也赢得了物理学尤其是电学的宠爱. “微分方程进入理论物理学时的婢女，但逐渐变成了主妇”（爱因斯坦），数学的作用为其扩张创造了条件.

20 世纪初狭义相对论和广义相对论创立，数学家闵可夫斯基建立了“闵可夫斯基空间”，即将时间与空间融合在一起的四维时空 $R^{3,1}$，闵可夫斯基几何为爱因斯坦狭义相对论提供了合适的数学模型. 有了闵可夫斯基时空模型后，爱因斯坦进一步研究引力场理论，用以建立更广义的相对论. 最后运用黎曼几何的绝对微分学，爱因斯坦终于在 1915 年导出了广义协变的引力场方程：

$$R_{\mu\nu} = -k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \quad (g_{\mu\nu}\text{黎曼度规张量})$$

此后，根据爱因斯坦时空整体是不均匀的，只是在微小的区域内可以近似地看作均匀的理论. 在数学上，广义相对论的时空可以解释为一种黎曼空间，非均匀空间连续区通过现在的黎曼度量表述出来，即

$$ds^2 = \sum_{\mu,v} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_v (\mu, v = 1,2).$$

广义相对论的数学表述第一次揭示了非欧几何的现实意义，成为有史以来数学应用的伟大范例.

20 世纪量子力学的创立是数学应用物理的又一经典成果. 截止到 1925 年之前，没有一种量子理论能以统一的结构来概括这一领域已经积累的知识. 当时的量子力学可以说本质上是相互独立的，有时甚至是相互矛盾的部分的混合体. 1925 年有了进展，由海森堡的矩阵力学和由薛定谔发展波动力学形成了两大量子理论. 这两大理论融合在一起的体系，便成为当时科学的急需，数学在科学界又起到了决定作用. 1927 年希尔伯特、冯・诺依曼、诺德海姆合作的论文《论量子力学基础》，开始了用积分方程分析量子力学的统一化. 冯・偌依曼进一步将提炼出的希尔伯特空间理

论，去解决量子力学的特征值问题，并最终将希尔伯特的谱理论推广到量子力学中，完成了量子力学公理化．从爱因斯坦、外尔等创立量子力学到冯·诺依曼量子力学公理化建立，展现出了数学在物理中扩张的现实，物理学成了数学的应用场，数学的疆场．

二、数学在生物学中的扩张

数学在物理学中扩张的同时，也在生物学中扩张．数学方法开始进入了生物学研究．20 世纪初，皮尔逊将统计学应用于遗传学与进化论，意大利数学家伏尔泰拉，在 1926 年提出著名的方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bxy \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cxy - dy \end{cases}$$

成功地解释了到地中海不同鱼种周期消长的现象，从此微分方程成了建立各种生物模型的工具．

20 世纪 50 年代，数学与生物学结缘，发现了脱氧核糖核酸（DNA）的双螺旋结构，从而拉开抽象拓扑学与生物学结合的序幕，凭借现代实验技术，使生物学家看到在电子显微镜下的 DNA 的双螺旋有缠绕和纽结．这里将 DNA 的纽结解开，再复制为 DNA 结构是拓扑学的功能所在．早在 19 世纪高斯就讨论过的数学纽结问题，预言“对两条封闭曲线或无限长内线的缠绕情况进行计数，将是位置几何（拓扑学）与度量几何的边缘领域的任务”，今天竟成为揭示生命奥秘 DNA 结构研究中的任务．随着后来纽结问题取得进展，关于纽结新的不变量——琼斯多项式发现，生物学家有了对 DNA 纽结分类的工具．

20 世纪 60 年代，CT 扫描仪的发明，是数学方法在医学诊断上的应用．1963～1964 年美籍物理学家科马克发表了计算人体不

同组织对 X 射线吸收量的数学公式，解决了计算机断层扫描的理论问题，科马克的计算公式运用了积分几何中拉东变换：

$$f(x) = \int_{\xi} f(x)\,\mathrm{d}_{\xi}x.$$

科马克利用拉东变换进行一套计算：

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -f(x,y)\cdot I,$$

$$I_{(t)}\mid t = 0 = I_0,$$

$$I = I_0 e^{-\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x},$$

记 $g = \ln\frac{I_0}{I} = \int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s.$

式中

I_0——X 射线穿入人体组织前的强度；

I——穿入后射线的强度；

$f(x,y)$——沿 L 变化时人体组织对射线的吸收系数.

数学的应用，解决了这一研究中的难题，进一步用计算机建构人体组织模断面图. 由于数学在生物学中应用的奇特成果，数学在生物学开辟了新的疆场，随之生物数学应声出场，生物统计、生物动力系统、生物控制论也出现了，数学已扩张到生物学科了.

三、数学在经济学中的扩张

20 世纪 40 年代以来经济学研究数字化，导致数学在经济学领域的扩张. 数学在经济学中的扩张是以数学家冯・诺依曼、摩根斯顿在《博弈论与经济行为》提出竞争的数学模型，并应用经济问题研究，这些成了现代数理经济学的开端. 20 世纪中叶前苏联数学家康托洛维奇和美国数学家丹齐格各自创立的线性规划论，在 20 世纪 50 年代被美国科学家库普曼斯应用于经济学大获成功.

20 世纪 50 年代以来数理经济学由于公理化方法的引进取得进展. 通过数学家和经济学家的努力,对一般经济均衡理论给出了严格的公理化表述,从此公理化方法使之成为现代经济学研究的基本方法,这一工作中美籍数学家、经济学家德布洛作出重大贡献.

20 世纪 70 年代,随机分析也进入经济学领域,布莱克和斯科尔斯将期权定价问题归结为随机微分方程的解,从而导出著名期权定价公式,即布莱克—斯科尔斯公式:

$$C(E) = SN(d_1) - \frac{E}{e^{rt}}N(d_2) \tag{1}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + 0.5\delta^2)t}{\delta\sqrt{t}} \tag{2}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) + (r - 0.5\delta^2)t}{\delta\sqrt{t}}$$

$$= d_1 - \delta\sqrt{t} \tag{3}$$

布莱克—斯科尔斯理论为金融数学方面的一项突破,后又被进一步完善. 许多经济学研究因使用数学方法,取得成功,而获诺贝尔奖.

四、数学在其他领域的扩张简介

数学在语言学上的扩张,20 世纪以来数学渗透到了形态学、句法学、词汇学、语音学、语义学的各个分支,逐渐形成了“数理语言学”这一学科,用数学方法研究语言现象并加以定量化和形式化的描述,其中使用了概率论与数理统计、数理逻辑、集合论、图论、信息论方法、公理化方法、数学模型方法、模糊数学方法等一系列方法,取得出人意料的结果. 这种现象更促使了数学在语言领域的扩张.

数学在政治学相关领域中的应用在斯普林格出版社纽约分

社出版的《应用数学的模型》一书中有具体论述.

数学在现代管理科学的扩张,例如运筹方法的广泛而深入应用尤为突出. 数学和计算机方法为决策优化提供了理论和方法.

数学在军事理论中的应用,尤其在计算机问世以来更为突出. 数学理论与方法使军事理论数量化、精密化的程度越来越高. 如军事运筹学应用数学方法与分析军事作战及有关行动,寻求最优决策,研究军队日常管理、作战指挥运筹、武器装备发展、国防战决策等问题;数理战术学运用数学方法对作战过程中最本质的规律作抽象的描述和处理,建立起公理化数学模型,用数学方法演绎一套战术理论和原则;计算机模拟作战可以在很短时间内模拟一个很长的战斗过程,并显示各种可能结果,使军事指挥员选择有利自己的方案.

数学在历史学科的应用,主要是统计学,突破了传统研究的局限,成为历史研究中计量的革命.

数学在其他领域的应用,我们已知重要的如 20 世纪优选法的应用在中国取得成果.

由上述成果,可知数学的扩张非常迅速,数学的扩张已成为现实.

参考文献

1. 吴振奎,吴健,吴昊. 数学大师的创造与失误. 天津:天津教育出版社,2004

2. M · 克莱因. 古今数学思想. 张理京译. 上海:上海科学技术出版社,1980

3. 李文林. 数学史概论. 北京:高等教育出版社,2005

第六章　猜想与悖论

§1　猜想

数学的发展和扩张中,出现了许多有意义的现象:猜想与悖论,由于这些现象激起人们对数学的兴趣,这一章就简单谈一谈数学中的猜想和悖论.

前面谈到数学思维.数学思维隶属思维的范畴.

思维是人脑对客观事物的本质、相互关系及其内在规律的概括和间接反映.认识客观事物的本质属性,其加工的主要方法是抽象.猜想(或假说)就是思维逻辑的一种形式.

人们在长期的生产、生活实践中积累了一些感性材料,随着时间的推移,阅历面的扩大,积累的材料增多,对客观世界的认识也逐渐加深.这时,人们对这些有限的、不完整的资料进行分析,试图找出某种规律性的东西,提出一种说法,对客观事物的已知性质做统一概括地说明.这种从分析有限的、不完整的资料中提出的东西,不一定具有真理性.我们把这种没有得到充分的实践检验或理论检验的说法,称为假说、猜想或假设.

恩格斯对假说在自然科学中的作用予以高度评价,他说:"只要自然科学思维着,它的发展形式就是假说."(恩格斯《自然辩证

法》). 数学是一门精密的科学,但它的发展也离不开假说.

假说虽然不一定具有真理性,但总是为要解释某一种现象而提出的,作为科学思维的假说还是要具有一定的事实为基础,不能是随意的猜测. 作为假说一般分为4个步骤:①问题的提出. 提出问题在某种意义上比解决问题更为重要. ②假说的准备. 问题提出后,要观察研究事物或关系的各方面,积累有关材料,还要详尽地了解和接触前人对有关事物研究的分析. ③假说的提出. 对自己拥有的直接经验和间接经验材料进行抽象,找出共性和规律性的东西,研究这个事物或现象的各种可能解释,找出一种较完善的说法. 假说的提出有两种基本方式:归纳和溯因. ④假说的验证. 假说形成之后,还要返回来尝试着解释,即从目前关于这个事物的性质和有关规律,对它作一番验证. 如果连一些最基本的相关问题都不能准确解释,或者矛盾,那么就需要修改.

假说是不断演变的,因为它是未经证实的论说. 因此,假说在不断验证的过程中,反复的洗练,进而修正它,丰富它,使其接近客观真理.

在数学中,假说被称为猜想,数学中的猜想很多,这里选取一些猜想的例子奉献给读者并将其研究过程和结果作以简介,以求读者在学习和研究中汲取教益.

一、哥德巴赫猜想

1742年哥德巴赫在给欧拉的一封信中提出这样的猜想:

每个偶数是两个素数之和;每个奇数是3个素数之和.

哥德巴赫猜想略经修改后较严格的表述为:每个不小于6的偶数可以表示成两个奇素数之和,每个不小于9的奇数可以表示成两个奇素数之和.

这一猜想,至今已300多年,直至20世纪才有本质性进展. 从1920年哈代(Hardy)和李特尔伍德(J. E. littlewood)创造圆法并应

用于数论,使停滞的哥德巴赫猜想研究开始松动. 1923 年在黎曼猜想的前提下证明了:每个充分大的奇数可以表示 3 个奇数之和. 继而,挪威数学家布朗(V. Brun)利用他的新筛法证明了每个大偶数都是素因子个数均不超过 9 的整数之和. 经后来数学家的研究已取得进展,最近的成果为:王元的{2,3}(1957 年),潘成洞{1,5}(1962 年),欧洲帮别里等证明了{1,3},陈景润证明了{1,2}(1973 年),陈景润的证法是"筛法理论的光辉顶点",但未能最终突破{1,1}的证明. 这还有赖于后人努力.

二、连续统假设

基数(或势)是集合论中的基本概念之一,它是自然数概念的扩张,也是对无穷大概念的另一种度量分类.

自然数全体的基数称为可列(或可数的),通常论作 $\aleph_0$,实数全体的基数称为连续统基数 $\aleph_1$,集合 A 的基数或势通常用 $\overline{\overline{A}}$ 表示.

伯恩斯坦(F. Bernstein)曾证明,若 $\lambda\mu$ 为两个集合的势,若 $\lambda \leqslant \mu$,且 $\mu \leqslant \lambda$,则 $\lambda = \mu$.

1882 年,现代集合论创始人康托尔提出了连续统假设:

若把所有超限基数按从小到大的顺序加以排列: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, …则 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$,即自然数集 **N** 的幂的集合的基数是大于自然数集合数中的最小基数的. 此即是前文希尔伯特 23 个问题中的第 1 个问题. 1963 年美国数学家柯恩证明了:连续统假设的真伪不可能在策梅洛—弗兰克尔公理系统内判别. 柯恩证明中采用的一种称之为"强迫法"的新方法,已在集合中得到广泛使用.

三、开普勒(Kepler)猜想

1611 年德国天文学家开普勒在叙述一种箱装球的方法,认为最节省的方法是:

体积为 V 的箱子,装 n 个半径为 r 的球,则 $\rho = \frac{4n\pi r^2/3}{V}$ 称为"箱装球的密度",显然它的 $\rho < 1$.

开普勒猜想:

$$\rho = \frac{4n\pi r^2/3}{V} \leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{2}} (\approx 0.740480489\cdots)$$

且 $\rho = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ 是最佳的.

此问题,即前文希尔伯特 23 个问题中的第 18 个问题的第 3 部分. 对于平面的情形,高斯早已给予解决. 1990 年美国加州大学伯克利分校的项武义写了长篇论文,声称已解决了开普勒猜想,但仍未能为数学家一致认可.

四、黎曼猜想

黎曼的猜想由于它在数论和在函数论中的位置,因而在没有解决的数学猜想中占据着重要地位,黎曼 1859 年的猜想为:

在带状区域 $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ 中,黎曼 ζ 函数 $\zeta(S) = \sum \frac{1}{n^s}$ 的零点都位于直线 $\delta = \frac{1}{2}$ 上.

自黎曼猜想提出后,引导了解析数论中的许多重要发现,但本身证明进展甚微,此猜想被收入希尔伯特的 23 个问题,当时,有人估计黎曼猜想获得解决无望. 不过有布尔巴基学派的学者,在其他领域中证明了相应的黎曼猜想.

五、庞加莱猜想

庞加莱猜想是拓扑学中著名问题和基本问题. 从拓扑学中我们知道:任意一个二维单联通闭曲面与二维球面同胚(拓扑等

价）．“单连通”指的是：在曲面上任意画一个圈，如果不离开曲线面的情形下这个闭圆可缩为一点，此曲线称为单连通曲面．因此二维球面是单连通曲面．环面则不是．就是说：单连通性是球面的特性．

1904 年庞加莱猜测三维情形应是同样的：

任何一个三维的单连通闭流形必与三维球面同胚．

后人又将庞加莱猜想推广到 n 维情形——广义庞加莱猜想．

被誉为“通才”的庞加莱试图证明自己的猜想，但未能如愿．直到 1960 年美国数学家斯梅尔（S. Smale）才取得第一个突破，他证明了庞加莱猜想对于五维和五维以上是成立的，但斯梅尔的方法用于三维、四维的情形却行不通．1980 年美国费里德曼宣告证明了四维庞加莱猜想．2006 年 6 月，中国科学家中山大学朱熹平教授和旅美数学家、清华大学讲席教授曹怀东对庞加莱猜想给出了完全的证明．至此，国际数学界关注上百年的重大难题——庞加莱猜想，被科学家完全破解，而且是中国科学家完成“最后封顶”工作．

假想（或猜想）的例子还有许多，它作为一种思维形式存在着，活跃着思维，创造和完善着数学．

§2　数学危机与数学悖论

数学中记载着一些悖论．每一次数学危机都伴随一些悖论的出现．

关于悖论，历史上，人们通常把导致逻辑矛盾的命题形成语句称为悖论，守旧派甚至把冲破传统观念的局限性的束缚引入的新概念、新方法也称之为悖论．

目前关于悖论的定义有几种，有的条件太严，使得外延太小；有的条件过松，导致外延过大．作者倾向于王仲春先生给出的

定义：

如果某一个理论中，能够推出两个互相矛盾的命题或语句，或者该系统中能证明两个互相矛盾的等价命题或语句，则称该系统中包含有悖论. 如果这个悖论能陈述一种命题的形式或语句，又称这个命题形式和语句是该系统中的一个悖论. 实际上，悖论是一个相对概念，即悖论是对一个理论系统而言的. 另外，悖论是一个系统中的逻辑矛盾，并非所有逻辑矛盾都是悖论. 下面仅举几例.

一、悖论举例

1. 第一次危机与芝诺悖论

在古典希腊数学中，希腊人在理性活动的早期，已经接触到了无限性、连续性等概念并对这些概念进行探讨. 自希腊波斯战争（前 492 ~ 前 449）之后，由于希腊成为希腊政治与经济文化的中心，数学也走向繁荣. 毕达哥拉斯学派认为宇宙万物皆依赖于整数的理论由于不可公度量（无理数）的发现而受到动摇. 当时发现$\sqrt{2}$和$\sqrt{2}$之外的无理数，这些“怪物”困惑着古希腊数学家. 数学中出现了一些逻辑困难，导致历史上第一次数学危机. 芝诺作为毕达哥拉斯派的成员，提出了著名的悖论，把无限性、连续性概念所遭遇的困难，通过悖论揭示出来.

（1）两分法悖论　运动的物体到达目的地前必须到达半路上的点，比如说物体通过 A 到 B，必须先达到 C，为达到 C 必须先达到 D……换言之，若空间无限可分，从而有限长度含无限多的点，这就不可能在有限时间内通过有限长度.



也有人将此悖论理解为：要通过有限长度，须通过无穷多的点，这即意味着必须到达没有终点的某种东西的终点. 这样运动将不存在.

(2)阿基里斯和乌龟赛跑　阿基里斯(Achilles)是希腊神话中的人物，传说他跑得非常快，乌龟则爬得很慢，但阿基里斯永远追不上在他前面的乌龟，因为他作为追赶者首先必须到达被追者出发之点，而行动较慢的被追者总是跑在前头.

例如阿基里斯速度是乌龟的 k 倍($k>1$)，乌龟在阿基里斯前面相距 a 处，当阿基里斯达到乌龟出发点时，乌龟又向前爬了 a/k，当又追 $\frac{a}{k^2}$……这样被追赶者总是在追者的前面，故阿基里斯永远追不上乌龟.

(3)飞矢不动　飞行的箭在任一确定的时刻静止在空间的一个确定位置，把时间看作各个瞬间组成时，即得出：飞行中的箭是不动的.

(4)操场(或游行队伍)问题　一组物体沿跑道挨着另一组个数相同的物体彼此相向移动，一组是从末端出发，另一组是从中间开始移动，两者移动速度一样，可知一半的时间等于双倍的时间.

对于三列点 A、B、C，若点列 A 保持不动，点列 B、C 沿相反方向做等速运动，在最小的时间单位里，B 向左移动一位，C 向右移动一位，这样 C 相对于 B 向右移动了两位，由此得出一个时间单位与它的双倍相等. 如图 1-6-1.

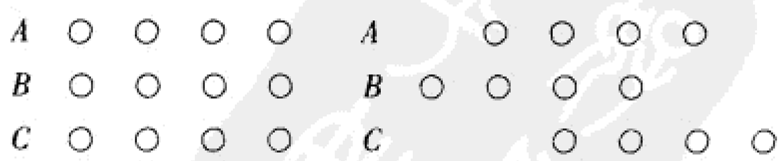


图 1-6-1

上面4个悖论，是从亚里士多德(Aristotle)驳斥芝诺观点时陈述的(在他所著《物理》一书中).

2. 第二次危机

在18世纪初期，微积分刚刚诞生，当人们发现牛顿、莱布尼茨在微积分中的不严格之处，尤其关于无穷小量是否是 o 的问题引起争论. 爱因斯坦称这次争论为蛙鼠之战. 当时有数学家攻击牛顿关于无穷小量的混乱假设，并指责以归纳代替演绎，如：求幂 x^n 的流数，牛顿假设 x 有一小增量 o 并以它除 x^n 流数的增量 $(x+o)^n-x^n$，使 x^n 流数的增量与 o 相比，然后又让 o 消失，得到 x^n 的流数 nx^{n-1}.

伯克莱指出这里的增量 o 的假设前后矛盾，是"分明的诡辩". 他提出了悖论："这些消去的增量是什么呢？它们既不是有限量，也不是无限小，又不是零，难道我们不能称它们为消逝量的鬼魂吗?"莱布尼茨也遭到非难，认为其正确结论是通过错误的原理出发，通过"错误的抵消"而得出的. 1831年高斯也表达了他对"实际无穷的恐惧".

伯克莱对微积分的攻击主要是出于宗教动机，目的是说明"流数术"不比基督教义"更清楚"、"更明白". 虽然伯克莱出于宗教动机，但是他的许多批评是切中要害的，在客观上揭露了早期微积分的缺陷. 这一争论，使得欧洲大陆数学使用代数化途径克服微积分的困难，其中欧拉和拉格朗日为微积分的严格化表述提供了内核.

3. 第三次危机和罗素悖论

数学的严格基础是自希腊数学以来数学家们追求的目标，在19世纪末分析严格化中出现了集合论. 这样，在经历两次危机后，好像给数学家和数学的严格性带来了永远摆脱危机的希望. 于是庞加莱便在1900年巴黎国际数学家大会上宣称："现在可以说，完全的严格性已经达到了，"但就在第二年，1902年罗素就提出了

简单明了的“悖论”，打破了人们的希望，也引起了数学上的又一场争论.

(1)罗素悖论　哲人罗素在1902年提出：

将集合分为两种，一种是集合 A 亦是它的元素，即 $A \in A$. 例如所有集合的集合就属于这一种. 人们称这种集合为本身的分子集. 另一种集合 A 不是它的元素. 即 $A \notin A$. 例如自然数就属于这一种集合. 人们称这种集合为非本身分子集. 现将所有集合按此标准分为两类，一类是所有本身分子集，另一类是所有非本身分子集. 现在问：“所有非本身分子集组成的集是哪一种集合?”为了叙述方便. 不妨把所有不属于自己的那些集合记为 T，试问集合 T 是否也是一种不属于自己的集合?

即构造 $T = \{x \mid x \notin x\}$，试问 $T \in T$ 是否成立?

若假定 $T \in T$，由 T 的定义将导致 $T \notin T$；反之，若假定 $T \notin T$，又由定义导致 $T \in T$.

这个悖论使用的论证方法很简单，且在数学中常用，故它很有名.

这个悖论的通俗提法是：某村有一位理发师，当地规定这位理发师必须而且只能给该村所有不自己刮胡子的人刮胡子，试问这位理发师的胡子由谁给他刮?

这里若假定理发师的胡子由他自己刮，这与规定“只能给不自己刮胡子的人刮”不符，他不应给自己刮胡子；若假定他的胡子由别人来刮，按规定他必须给“不自己刮胡子的人刮胡子”，那他的胡子又应自己刮，这样无论如何总会导致矛盾.

(2)布拉里—福蒂(Bruali - Forti)悖论　这是1897年由布拉里(Bruali)和福蒂(Forti)提出的.

设 W 为由序数全体构成的集合：$W = \{0,1,2,\cdots,\omega,\cdots\}$，则 W 为良序集.

又设 Ω 为 W 的序数，作为 W 的元素的序数都比 Ω 小，但是，

W 是一切序数的集合，故序数 $\Omega \in W$，故 $\Omega < \Omega$ 矛盾.

(3)康托尔悖论　康托尔在 1883 年证明了：任一集合的基数，小于这一集合的幂集合（全体子集组成的集合）的基数.

1899 年，康托尔发现：若记集合 $\cup$ 的幂集合为 $P(\cup)$，试问集合 $\cup$ 和集合 $P(\cup)$ 的基数（势）哪个大？

由康托尔定理应有 $\overline{\overline{\cup}} < \overline{\overline{P(\cup)}}$（这里 $\overline{\overline{\cup}}$ 表示 $\cup$ 的基数）；但又据子集关系 $P(\cup)$ 为 $\cup$ 的子集，又应有 $\overline{\overline{\cup}} \geqslant \overline{\overline{P(\cup)}}$，矛盾.

(4)抛球悖论　这个悖论是哲学家布莱克根据芝诺悖论略加修改得到的关于时间的悖论：一个球在 A 框停一分钟，传到 B 框停 $\frac{1}{2}$ 分钟，再传给 A 停 $\frac{1}{4}$ 分钟，又传给 B 在 B 停 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 分钟……如此往复做下去. 试问球在 A 中还是在 B 中，显然在 A 框不对，在 B 框也不对，因为数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 不存在最后一项.

(5)理查德(Richard)悖论（说谎者悖论）　1905 年，理查德(Richard)提出下面的悖论：

“不可用少于 100 个字而定义的最小自然数”实际上可由本语句在 100 个字以内定义之，这是一个矛盾.

该悖论实例是下面古希腊的克里特(Grete)岛说谎者悖论的发展：

克利特(Grete)岛上的埃皮明迪斯(Epimenids)说：“克利特岛上的人都是说谎话的人.”试问这句话是真话还是谎话？

这里若假定他的话是真话，根据他的话及他又是该岛上的人，可推出他的话是谎话；又若假定他这句话是谎话，及他又是该岛上的人，可推出他的话是真话.

集合论中的“悖论”，动摇了集合论的基础，因而对整个数学产生了强烈影响，这些曾被称为数学史上的第三次危机. 由于这次的冲击，使得一些著名数学家也觉得悲观，比如外尔(C. H. H.

Weyl)曾说："数学的最后基础和终极意义仍旧没有解决，我们不知道沿着哪一个方向去寻找最后的解答，甚至也不知道我们是否能够希望找到一个最后的客观的回答."

数学家为了消除上述矛盾现象，提出各种不同的解决方案.近百年过去了，数学界至今未能给出解决此问题的完善方案.

但是集合悖论的研究，对于数学基础理论、逻辑学、哲学等均有重要意义，近代数学的三大流派（逻辑主义派、直觉主义派、形式公理派）的形成和发展均来自悖论问题的研究.

4. 其他悖论举例

除了集合论的悖论外，在数学其他分支上的悖论也是屡见不鲜，许多新概念的诞生，大都会招来一些悖论（有些是反例），这也导致新概念的修正与完善，这里简述几例.

（1）数的悖论　负数的引入曾使当年著名物理学家帕斯卡（E. Pascal）认为是"胡说八道"，他的密友阿尔诺（A. Arnauld）别出心裁地说道："$(-1):1 = 1:(-1)$，即较小数：较大数 = 较大数：较小数，荒唐！"显然又是一个悖论.

（2）对数 $\ln(-1)$　约翰·伯努利（J. Bernoulli）讨论积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+ai)(x-ai)} = -\frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2ai}[\ln(x+ai)-\ln(x-ai)] = -\frac{1}{2ai}\ln\frac{x+ai}{x-ai}$$

此后他与莱布尼茨讨论 $\ln(-1)$ 的意义时认为 $\ln(-1)$ 是实数，而莱布尼茨断定 $\ln(-1)$ 是虚数.

（3）函数中的悖论　诸如函数连续性的悖论，下面再看两例.

柯西曾认为：连续函数的收敛级数的和是连续的.

阿贝尔给出：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

在 $x = k\pi(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 处不连续.

处处连续处处不可导例子的构造，对于函数连续与可导判定也是一种挑战.

(4)曲线论中的悖论　曲线是什么？这是一个难以说清楚的概念.

1887 年若尔当给出曲线的一个定义：连续移动着的点的轨迹.

可 3 年后(1890 年)，皮亚诺构造了能填满整个空间的曲线.

由此，庞加莱(J. H. Poincare)认为若尔当的定义太宽了，必须修正.

但后来有人又指出：函数 $y = \sin\frac{1}{x}$ 的图像及其在 y 轴上的极限点，也是一条曲线，但它不是连续移动的点的像. 这即是说：若尔当的定义太窄了.

门格尔(Menger)在给出维数概念后将曲线定义为"一维连续统". 它的正确性直到曼德布罗特引入"分数维"之前皆无问题.

(5)几何学中的悖论　几何中悖论例子很多，其中较著名的是 1924 年巴拿赫(S. Banach)和塔斯基(A. Tarski)用集合论观点给出关于几何剖分的论断：任两个球(大小可不等)皆组成相等(可等度分解). 更一般地：在 $R^n(n>2)$ 中任何两个有界集皆可等度分解.

(6)表面积与体积

图 1-6-2 给出双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的一个分支($x>0$)，若将它绕 x 轴旋转可得一个旋转双曲面.

用微积分知识可以证明：

当 x 取值为 $[1, +\infty]$ 时，曲面面积是个无限大量；但它包含的体积却是一个有限值.

这是说：一个用有限数量的油漆可以装满的容器，涂刷它的外表却要用无限多的油漆.

这个悖论至今尚无较初等的"解释"，可谓是一种无奈.

其实它不过是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，而 $\sum_{n=1}\frac{1}{k^2}$ 收敛的一个变形而已.

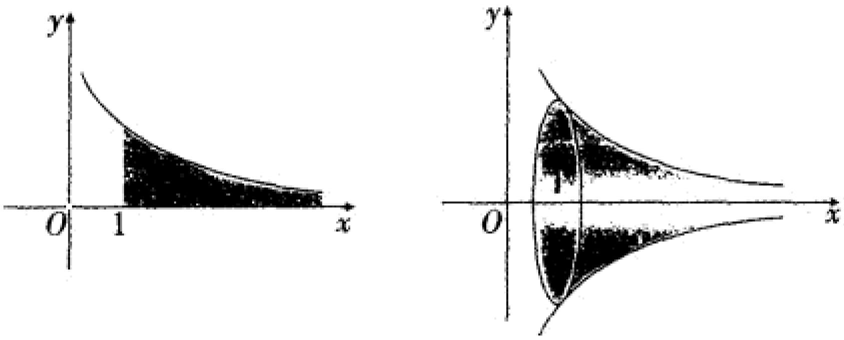


图1-6-2

……

以上所述，可以看到，每一个"悖论"，每一次数学危机，都给数学家带来一场争论，都对数学基础和数学自身的理论进行一次审视和考验. 每冲破一次危机，数学就走向新的发展.

二、悖论的特征、根源与意义

1. 悖论的特征

悖论的逻辑结构大体分为四类：

(1) $A \Rightarrow \neg A$，但 $\neg A \nRightarrow A$，即由 A 可以推出非 A. 但反之由非 A 却推不出 A，如理查德悖论(说谎者悖论).

(2) $A \Rightarrow \neg B \wedge B$，$(A \neq B)$，即由 A 可推出非 B 和 B. 如康托悖论.

(3)$\neg A \Leftrightarrow A$，即非A与A是因果关系或A与非A同真同假，如罗素悖论.

(4)$A = ?$ 这表示推不出任何结果，如抛球悖论.

2. 悖论的根源

(1)悖论实质上是一种特定的逻辑矛盾，产生这种逻辑矛盾的根源之一是构成悖论的命题或语句中隐藏着利用恶性循环定义的概念. 正是这种恶性循环圈导致了悖论的产生. 如康托悖论.

根源二是如利用康托朴素的集合论的概括原则构造集合，即将满足某一性质p的元素的总体确定一个集合，记作$A = \{x \mid p(x)\}$或$x \in A \leftrightarrow P(x)$.

根源三是无限概念的参与. 可以说它是数学矛值的主要根源之一.

(2)从认识论和方法论的角度看，产生逻辑矛盾或悖论的根本原因是认识客观世界的方法与客观规律的矛盾. 如康托悖论中"所有集合的集合". 这种集合，客观世界中是没有的. 关于芝诺的"飞矢不动"，是犯了一个概念错误，把一个实质上高维空间的问题，看作低维空间的问题了.

(3)人们对客观世界认识的局限性. 换句话说人们对客观规律认识的深度不够，认识的方法不具备. 如奥克莱悖论，在18世纪人们认为从逻辑上讲的确构成悖论，但当今这个悖论不存在了. 这说明随着时代的发展，人们认识水平的提高，以前的悖论到了今天可能被消除，现在的悖论也许将来会被消除.

3. 悖论的意义

(1)悖论与数学基础　悖论就是一种特殊的矛盾，人们通过对数学中这种内在矛盾的揭示、研究和消除，特别是对数学基础理论逻辑学的完善和发展有着重要的意义. 如，由于罗素悖论导致了公理集合论的诞生，促进了证明论、模型论、递归论的发展.

(2)悖论在数学方法论方面的意义　20世纪30年代，哥德尔

证明了“不完全定理”. 这是数学、逻辑学发展史上的一个里程碑，应该说哥德尔的证明思路与悖论有密切联系，并受到启发. 其证明的步骤：①完全形式化；②完全量化，包括符号量化、公式量化、证明量化；③仿“理查德悖论”的体裁，构造了一个命题；④证明“G 与非 G 在 L 系统”中不可证. 关于证明过程省略.

还应当指出的是，哥德尔证明“不完全定理”不仅具有划时代意义，即揭示了数学领域内绝大部分公理系统在古典意义下不完备，而且在方法论方面作出了重大突破.

参考文献

1. M·克莱因. 古今数学思想. 张理京，张锦贵，江泽涵译. 上海：上海科学技术出版社，2002

2. 李文林. 数学史概论. 第二版. 北京：高等教育出版社，2002

3. 王元明. 数学是什么. 南京：东南京大学出版社出版，2003

4. 吴振奎，吴昊. 数学的创造. 上海：上海世纪出版集团，上海教育出版社，2003

5. [俄]亚历山大罗夫. 数学——它的内容方法和意义. 王元，万哲先译. 北京：科学出版社，2004

6. 吴振奎，吴健，吴旻. 数学大师创造与失误. 天津：天津教育出版社，2004

7. 高隆昌. 数学及其认识. 北京：高等教育出版社，2001

8. 王仲春，李元中，顾蕾莉等. 数学思维与数学方法论. 北京：高等教育出版社，1989

9. 王子兴. 数学方法论问题解决的理论. 第二版. 长沙：中南大学出版社，2002

第七章　数学的成果和数学中其他现象

自远古的萌芽，到今天数学已发展成为拥有60个二级学科、400个三级学科及宏伟的知识体系，已成为一株繁茂的大树，并且这株大树还在旺盛地生长着. 在20世纪里，数学取得的成果印证和记录着数学的发展和辉煌，本章简明地回望一下数学在20世纪的成果.

§1　20世纪的数学成果简述

19世纪分析严格化，使数学经历了巨大进展和积累. 庞加莱、克莱因、希尔伯特等数学家卓有成效的工作，为20世纪数学的发展打下了坚实的基础，开辟了广阔的空间. 20世纪百年间数学以指数式发展，并取得了丰硕成果.

一、希尔伯特23个问题及其解决情况

数学界进入20世纪第一个重大的事件发生在1900年8月.

希尔伯特在巴黎国际数学家大会上作了题为《数学问题》的演讲，他根据19世纪数学研究的成果和发展趋势提出了23个问题. 他的演讲为20世纪的数学拉开了序幕. 这些问题，在百年间一直激发着数学家的兴趣. 历经一个世纪的研究和工作，已有一

半得到解决或基本解决；有些问题虽然未得到解决，但也取得了进展.具体简况如下：

1. 连续统假设

自然数(可数)集基数$\aleph_0$与实数集(连续统)基数$C=2^{\aleph_0}$之间不存在中间基数. 1963年，美国数学家柯恩(P. Clhen)证明了：连续假设的真伪不可能在策梅洛—弗兰克尔公理系统内判别.

2. 算术公理的相容性

1931年，哥德尔(K. Godel)证明了希尔伯特关于算术公理相容性的“元数学”纲领不可能实现. 相容性问题至今未解决.

3. 两等底等高四面体体积相等

1900年德恩(M. Dehn)证明了确实存在着等底等高却不剖分相等，甚至也不拼补相等的四面体. 这个问题成为最先获解的希尔伯特问题.

4. 直线为两点间的最短距离

问题提得过于一般.

5. 不要定义群的函数的可微性假设的李群概念

格利森(A. M. Gleason)、蒙哥马利(D. Montgomery)、席平(L. Zippin)等，于1952年对此问题给出了肯定解答.

6. 物理公理的数学处理

在量子力学、热力学等学科，公理化已取得很大成功. 至于概率论公理化已由科尔莫戈罗夫(A. H. Kojimoropob)等建立(1933).

7. 某些数的无理性与超越性

1934年，盖尔丰德和施奈德(T. Schneider)各自独立地解决了问题的后半部分. 即对于任意代数数$\alpha\neq 0, 1$和任意代数无理数β证明α^β的超越性.

8. 素数问题

包括黎曼猜想、哥德巴赫猜想和孪生素数猜想,均未解决.

9. 任意数域中最一般的互反律之证明

已由高木贞治(TakagiTeiji,1921)和阿廷(E. Artin,1927)解决.

10. 丢番图方程可解性判别

1970 年,马蒂雅舍维奇证明了,不存在判定任一给定丢番图方程有无整数解的一般算法.

11. 系数为任意代数数的二次型

哈塞(H. Hasse,1929)和西格尔(C. L. Siegil,1936,1951)在此问题上获得重要结果.

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广

尚未解决.

13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程

连续函数情形 1957 年已由阿诺解决.

14. 证明某类完全函数系的有限性

1958 年被永田雅宜否定解决.

15. 舒伯特计数演算的严格基础

代数几何的严格基础已由范德瓦尔登(B. L. Van der Waerden,1938 – 1940)和韦依(A. Weil,1950)建立,但舒伯特(H. C. H. Schubart)演算的合理性尚待解决.

16. 代数曲线与曲面的拓扑

有很多重要结果.

17. 正定形式的平方表示

已由阿廷于 1926 年解决.

18. 由全等多面体构造空间

部分解决.

19. 正则变分问题的解是否一定解析

1904 年伯恩斯坦证明了一个变元的解析非线性椭圆型方程其解必定解析. 该结果后又被推广到多变元椭圆组.

20. 一般边值问题

成果丰富.

21. 具有给定单值群的线性微分方程的存在性

长期以来人们一直认为普莱梅依 1908 年已对此问题作出肯定解答. 但八十年后发现普莱梅依的证明有漏洞. 1989 年前苏联数学家鲍里布鲁克关于此问题举出了反例,使第 21 问题最终被否定解决.

22. 解析关系的单值化

一个变数情形已由寇贝(P. Kobe)解决.

23. 变分问题的进一步发展

我们看到,希尔伯特问题的解决与研究,大大推动了数理逻辑、几何基础、李群论、数学物理、概率论、数论、函数论、代数几何、常微分方程、偏微分方程、黎曼曲面论、变分法等一系列数学分支的发展;有些问题的研究(如第二问题和第十问题)还促进了现代计算机理论的成长;20 世纪数学的发展,远远超出了希尔伯特问题所预示的范围.

二、在沃尔福奖和菲尔茨奖记述的数学成就

菲尔茨(John. harle Field)是加拿大数学家,1936 年设立了菲尔茨奖(数学上的诺贝尔奖),授予那些 40 岁以下对未来数学发展起重大作用者.

沃尔福(R. Wolf),德国人,1936 年 1 月 1 日设立沃尔福奖. 它是因菲尔茨奖的局限性而设立的. 因菲尔茨奖不足以代表数学家一生的全部成就,它不能使 40 岁以上者获奖.

菲尔茨奖、沃尔福奖获奖者的成果,是 20 世纪的数学成果的

代表. 1943 年以来部分菲尔茨奖、沃尔福奖成果见附录一、附录二.

三、20 世纪现代数学杰出成果举例

1. 哥德尔不完全性定理(1931)

哥德尔不完全性定理,是研究相容性问题而引出的非常深刻的思维成果.

1931 年,奥地利数学家哥德尔(K. Godel,1906 ~ 1978)发表题为《论 <数学原理>》的论文,其中证明了一条定理:

任一足以包含自然数算术的形式系统,如果是相容的,则它一定存在有一个不可判定命题,即存在某一命题 A 使 A 与 A 的否定在该系统中皆不可证.

系统中存在不可判定的命题也叫该系统的"不完全性",因此哥德尔的上述结果通常被称为"哥德尔第一不完全性定理". 第一不完全性定理表明:任何形式系统都不能完全刻画数学理论,总有某些问题从形式系统的公理出发不能解答,情形甚至更糟,在第一不完全性定理的基础上,哥德尔进一步证明了:

在真的但不能由公理来证明的命题中,包括了这些公理是相容的(无矛盾的)这一论断本身. 也就是说,如果一个足以包含自然数算术的公理系统是相容的,那么这种相容性在该系统内是不可证明的.

这就是所谓"哥德尔第二不完全性定理",第一不完全性定理与第二不完全性定理合称"哥德尔不完全性定理". 它们揭示了形式化方法的不可避免的局限性,使希尔伯特证明形式系统相容性的方案受到沉重打击.

哥德尔的理论为数学基础带来新的生命. 哥德尔不完全性定理破天荒地第一次分清了数学中"真"与"可证"是两个不同的概念.

其次，哥德尔在不完全性定理的证明中提出的“原始递归函数”概念，成为算法理论或可计算理论的起点.

虽然哥德尔定理指出了形式化数学的局限性，但这并不意味着公理化方法的消亡. 相反，哥德尔的结果极大地促进了希尔伯特“证明论”的发展.

作为20世纪最发人深省的数学定理之一，哥德尔不完全性定理所引起的理论思考，一方面已结出丰硕的成果，一方面却又余韵无穷.

2. 高斯—博内公式的推广(1941～1944)

从局部到整体，从低维到高维，这是20世纪数学在许多领域表现出来的趋势. 微分几何中高斯—博内公式的推广，提供了这方面的典型例子.

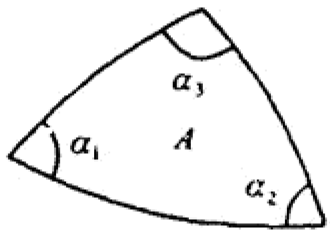


图1－7－1

平面上任一三角形三内角和恒等于π. 对于一般曲面上由三条测地线构成的三角形(图1－7－1)：

$$\iint_A k\mathrm{d}\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

式中

$\iint_A k\mathrm{d}\sigma$——高斯曲率 k 在三角形 A 上的积分；

α_1、α_2、α_3——测地三角形三内角值.

这一公式是高斯在1827年证明的. 1844年，法国数学家博内(P.－O. Bonnet，1819～1892)将这一公式推广到一般曲面上任意闭曲线 C 围成的单连通区域情形：

$$\int_C \rho_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m}(\pi - a_i) + \iint_D k\mathrm{d}\sigma = 2\pi$$

式中

$\int_C \rho_g \mathrm{d}s$——测地曲率沿闭曲线 C 的线积分；

$\alpha_i(i = 1,2,\cdots,m)$——组成 C 的各弧段连接点的内角值；

D——C 所围区域. 此公式也叫高斯—博内公式，在定向闭曲面情形，它变为：

$$\iint_A k\mathrm{d}\sigma = 2\pi X(D).$$

式中

$X(D)$——D 的欧拉示性数，

它等于 1 减去曲面上洞的个数，是通常多面体欧拉数 $v - e + f$（欧拉 1750，其中的 v、e、f 分别为多面体顶点数、棱数和面数）的推广.

二维紧致黎曼流形上的高斯—博内公式是经典微分几何的一个高峰，其后一个世纪内数学家们力图将它推广到高维紧致黎曼流形上去，韦依和阿沦道弗证明了任意黎曼流形上的高斯—博内公式. 高维高斯—博内公式的第一个内蕴证明是由中国数学家陈省身给出的，他 1944 年发表了论文《对闭黎曼流形高斯—博内公式的一个简单的内蕴证明》.

高斯—博内公式将黎曼流形的整体拓扑不变量（欧拉示性数）与它的微分几何不变量（高斯曲率）联系起来，因此具有基本的意义，整体微分几何的许多工作都围绕这一公式展开.

3. **米尔诺怪球**（1956）

拓扑学的一个基本对象是流形，流形的研究与物理应用密切相关. 物理学家感兴趣的不是空的流形，而是所谓微分流形，即可以在其上建立整体一致的微分技巧的流形. 因此，什么样的流形才是微分流形？给定一个微分流形，是否只有一种还是有多种方式赋予它微分结构？这不仅是微分拓扑学的一个基本课题，同时也成为物理学家们关注的问题.

在 20 世纪中期以前，数学家们已经知道所有的一、二、三维流形都是微分流形，而且本质上只有一种微分结构. 一般猜测对高维情形也能证明同样的结论. 但 1956 年，美国数学家米尔诺

(J. W. Milnor)却证明了：七维球面上可以建立 28 种不同的微分结构. 这一意外的发现使人震惊，七维球面被称为“怪球”. 后来，人们直接称它为“米尔诺怪球”.

米尔诺怪球的发现引起了微分拓扑学研究的高潮. 1981 年，美国数学家弗里德曼证明了存在着不是微分流形的四维流形，就是说四维在性质上与二、三维流形有本质不同. 由此他获 1986 年菲尔诺奖. 由米尔诺怪球引发的流形拓扑学的发展，较之弗里德曼非光滑四维流形更吸引着数学家，人们对具体的流形特别是 n 维欧几里得空间 R^n 更有兴趣.

数学家唐纳尔逊(S. Donaldson)竟证明了：R^4 上确实存在着与通常不同的微分结构，不久又有人证明了 R^4 上可以有无穷多种微分结构，而通常的微分结构只不过是其中之一.

但使得四维时空 R^4 与众不同的原因，以及能否最终证明迄今惯用的微分运算是否正确？数学家们目前还不能回答这个问题.

4. 阿蒂亚—辛格指标定理(1963)

阿蒂亚—辛格指标定理，是现代数学的典型范例.

阿蒂亚—辛格指标定理是古典黎曼—罗赫定理的推广. 在复变函数论中，每个解析函数都有与它相应的黎曼曲面. 曲面的结构是拓扑学研究的对象，因此，函数与拓扑学之间是存在联系的. 黎曼首先发现这些线性无关亚纯函数的个数与曲面的拓扑不变量亏格有关(闭黎曼曲面即一维流形，在拓扑上相当于连接有若干个柄的球面，亏格就是柄的个数)，并在二者之间建立了一个不等式，在至多有 n 个一阶极点的情形.

$$\dim F \geqslant 1 + n - g.$$

1864 年，黎曼的学生罗赫(G. Roch)在这个不等式中添加一项而使它变成了等式：

$$\dim F - \dim D = 1 + n - g,$$

式中

$\dim F$——F 在 M 上亚纯函数集合 $F = \{f \mid f$ 在点 $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 处不超过一阶的极点，并且此外没有极点$\}$ 构成的向量空间的维数；

g——M 的亏格；

$\dim D$——每点 a_i 处不小于一阶零点的全纯微分结构的向量空间的维数.

这个等式就是黎曼—罗赫定理. 当然一般情形的黎曼—罗赫定理具有更为复杂的形式.

黎曼—罗赫定理是一条分析定理，进入 20 世纪以后，数学家们开始了将黎曼—罗赫定理推广到高维紧复流形的艰巨努力. 日本数学家小平邦彦、德国数学家希策布鲁克(F. Hirzebruch)等进行一系列新的研究和推广，其中最重要的便是英国数学家阿蒂亚(M. F. Atiyah)和美国数学家辛格(I. M. Singer)证明的"指标定理"，从紧致黎曼流形上向量丛间椭圆算子"指标(index)"的角度，得到了非常一般的公式：

$$\dim\ker\triangle - \dim\mathrm{coder}\triangle = 1 - g.$$

阿蒂亚—辛格指标定理统一了若干著名的经典定理. 阿蒂亚—辛格指标定理不仅在内容上沟通了分析与拓扑学两大领域，而且在研究方法上涉及到分析、拓扑、代数、几何、偏微分方程、多复变函数等许多核心数学分支，同时在物理学杨—米尔斯理论中获得了重要应用，因而被誉为当代数学重大成就之一，因此阿蒂亚 1966 年获菲尔茨奖.

5. 孤立子与非线性偏微分方程(1965)

对非线性数学问题的日趋重视，也是 20 世纪尤其是后半叶数学发展中的一个特点. 虽然在 20 世纪上半叶，线性偏微分方程理论获得了很大的进展，但非线性方程的研究却困难重重，进展缓慢. 这种状况与所谓"孤立子"方程的研究有关.

早在 1834 年，英国人拉塞尔(S. Russell)骑马追踪观察运河中船只突然停止时激起的水波，发现了他所谓的“孤立波”现象. 但当时的数学家未能提供描述这种孤立波的工具. 直到 1895 年，荷兰数学家柯特维格(D. J. Korerweg)和法国数学家德弗里斯(G. de Vries)才给出了孤立波现象的数学模型，一个非线性偏微分方程：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right\}.$$

式中

x——沿河道的一维坐标；

t——时间；

$\eta(x,t)$——高于平衡水面的波峰高度；

l——水深；

g——重力加速度；

α、σ——有关常数.

这个方程叫柯特维格—德弗里斯方程，简称 KdV 方程. 在 1960 年，加德纳(C. S. Gardner)等人又重新发现这个方程，才引起人们注意，使 KdV 方程成为可以描写许多现象的数学物理基本方程.

由于 KdV 方程可以证明孤立波的传播速度与其振幅成正比，因此可以发现较大的波比较小的波运动得快. 新的问题是两个不同的孤立波经叠加后是否还是原方程的解. 1965 年，美国学者克鲁斯卡尔(M. D. Krusdal)和扎布斯基(N. J. Zabusdy)将描述孤立波的函数表示为：

$$u(x,t) = 3D\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{D}}{2}(x - Dt)$$

并在计算机上用数值模拟的方法详细考察了等离子体中孤立子碰撞的非线性作用过程，发现两个孤立波碰撞后仍表现为两个形

状不变的孤立波，于是他们就称其为“孤立子”(solion)，于是 KdV 方程从此又被称为“孤立子方程”. 后来人们发现光纤通信、神经细胞脉冲传导、木星红斑活动等都存在孤立子性质.

1967 年，加德纳、格林纳(J. M. Greene)、克鲁斯卡尔和缪勒(R. M. Mure)等证明了：当薛定谔方程的位势系数按孤立子方程演化时，特征值保持不变. 以此为突破点，他们利用特征值问题的成果，发展出一套“散射反演方法”，成功地解出了 KdV 方程. 后来人们发现，散射反演方法经过推广可以用来求解一系列在应用中的非线性方程，从而掀起了非线性方程研究的热潮.

6. 四色问题(1976)

四色问题也叫四色猜想或四色定理. 1852 年首先由一个英国青年大学生古德里(F. Guthrie)提出. 古德里在给一张英国地图着色时猜想：为了给任意一张平面地图着色，并使任何具有公共边界线的区域颜色不同，至多需要 4 种颜色. 这就是后来所谓的“四色问题”，但并不是一个简单的问题.

四色问题有一个令人迷惑的地方：在更复杂的曲面上，问题的解决反倒容易. 到 1968 年，数学家们已解决了除平面和球面以外所有曲面上的地图四色问题，恰恰是平面和球面(地球仪)这种最简单的情形，却遇到了困难.

在四色问题上，肯泊曾作过研究，证明虽然失败，但其中却提出了后来被证明对四色问题的解决具有关键意义的两个概念：“不可避免构形集”和所谓的“可约性”.

不可避免构形集是具有这样性质的一组图形：任何一张平面图至少包含其中一个作为其一部分. 肯泊证明了任何一张正规地图中，一定存在着至多有 5 个邻国的国家，也就是说在图(1-7-2)(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)(Ⅳ)所示图形中，至少有一种会在该地图某处出现，这样，图(1-7-2)(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)(Ⅳ)就被称为“不可避免构形集”.

为证明四色定理，肯泊用的是反证法.

肯泊的论证对有两个、3 个和 4 个邻国的国家来说是完全正确的，但他对有 5 个邻国情形的处理，即对图1－7－2（Ⅳ）的可约性证明却犯了错误，这个错误被希伍德指出，但没有人能纠正.

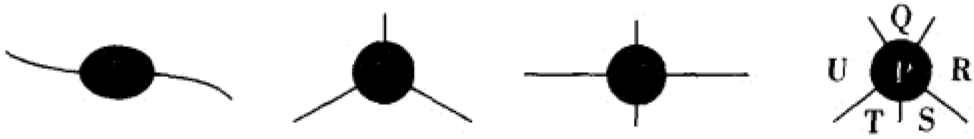


图 1－7－2

1913 年开始，一些数学家对平面图形的可约性进行深入研究，他们仔细分析了肯泊受挫的最后一种情形，认识到必须寻找与肯泊不同的不可避免集，而要找到这样一组不可避免集却遇到了计算的困难. 直到 1969 年，才有一位德国数学家希斯第一次提出了寻找不可避免可约图的算法，称之为“放电算法”，从此打开了新局面.

1960 年末，美国伊利诺大学的哈肯注意到希斯的算法可以大大改进和简化，他与数学家阿佩尔合作，开始用这种简化的希斯算法产生不可避免可约图集，他们采用了新的计算机实验方法，在积累了大量经验后，到 1976 年6 月，他们终于获得了成功：一组不可避免可约图终于找到了，这组图形一共有 2 000 多个.

7. 费马大定理的证明（1994）

费马大定理于 1994 年被怀尔斯证明，可以说是 20 世纪数学家一首美妙的终曲.

费马大定理方程：

$$x^n + y^n = z^n (n > 2 \quad n \in \mathbf{N}^+).$$

这条定理，自从费马提出来后，曾吸引了像欧拉、高斯、柯西、

勒贝格等这样一些大师,然而始终没有解.

关于对费马定理的研究数学家们是从分析几种特殊情形入手的.费马本人大概就是这样去做的,史书上一般确认他用无限下降法证明了 $n = 4$ 的情形.费马之后,整个18世纪,关于费马大定理只有一个本质的结果,就是 $n = 3$ 的情形,并且是由欧拉给出的.

关于费马定理:若对一给定指数 m 证明了费马大定理,那么对指数为 m 的倍数,费马大定理也成立.因此,为了最终证明费马大定理,只需考虑 n 为大于2的奇素数和 $n = 4$ 的情形即可,$n = 4$ 的情形已为费马解决,问题便归结为对 n 为奇素数情形证明费马大定理成立.由于欧拉证明了 $n = 3$ 情形,下一个目标自然就是 $n = 5$ 的情形,它是1825年由狄利克雷和勒让德证明的,他们的证法基本上是欧拉对 $n = 3$ 情形所用方法的延伸.1839年,法国数学家拉梅(G. Lame)证明了 $n = 7$ 的情形,到 $n = 11$ 的情形,拉梅在1847年又提出了新的途径,但后来却认识到自己新的"分圆整数"是错误的.

库默尔是高斯的学生,高斯曾尝试过费马大定理的证明,但在证明 $n = 7$ 的情形遭失败后,放弃了这一课题,库默尔却从1844年起发表了一系列论文,来解决证明费马大定理中涉及的一个关键问题——惟一因子分解定理,并为此创造了"理想数"概念.利用理想数,库默尔证明了:对于所有小于100的素指数 n,费马大定理成立,这是历史上第一次对一整批指数 n 证明了费马大定理.

库默尔在费马大定理证明方面的领先地位保持了一百多年.之后,现代积分理论的奠基人勒贝格曾向法国科学院提交一个关于费马大定理的证明,但经过仔细审查,仍然发现了漏洞.

直到1983年,费马大定理的研究才出现新的转机,德国数学家法尔廷斯(G. Faltings)证明了一条重要的猜想——莫代尔猜想

(L. Motdell, 1922)，莫代尔猜想是说像 $x^n + y^n = 1$ 这样的方程至多有有限个有理数解，但由于方程的任一整数解可导出 $x^n + y^n = 1$ 的有理数解，因此可以得出结论：$x^n + y^n = z^n$ 至多只有有限多个（无公因子）整数解，法尔廷斯的结果虽未证明费马大定理，但却把存在无穷多个解的可能性降低到了至多只能有有限多个解，法尔廷斯因此获得了1986年的菲尔兹奖.

法尔廷斯之后又经过十年，终于有数学家将其解决. 所用的方法与前人不同，是综合利用了现代数学许多分支的成就，特别是1950年以来代数几何领域中关于椭圆曲线的研究结果.

形如 $y^2 = f(x)$（$f(x)$ 为 x 的三次或四次多项式）的方程所描绘的曲线叫椭圆曲线. 1955年，日本数学家谷山丰（G. Shimuta）首先猜测椭圆曲线与另一类数学家们了解较多的曲线——模曲线之间存在着某种联系，谷山的猜测后经韦依和志村五郎（G. shimura）进一步精确地形成了所谓"谷山—志村猜想"：

有理数域上的椭圆曲线都是模曲线.

1985年，一位叫弗雷的德国数学家却指出了二者之间的重要联系，他提出了如下的命题：

弗雷命题 假定费马大定理不成立，即存在一组非零整数 A，B，C 使得 $A^n + B^n = C^n (n>2)$，那么用这组数造出的形如 $y^2 = x(x+A^n)(x-B^n)$ 的椭圆曲线（后称"弗雷曲线"），不可能是模曲线.

显然，弗雷命题与谷山—志村猜想是矛盾的，如果能同时证明这两个命题，根据反证法就可以知道"费马大定理不成立"这一假定是错误的，从而就证明了费马大定理，弗雷当时没有能严格证明他的命题. 弗雷命题1986年被美国数学家里贝特证明，这样证明费马大定理的希望便集中于谷山—志村猜想.

怀尔斯从小就梦想证明费马大定理，但当他成长为一名职业数学家后，曾认为费马大定理也许只是个孤立的难题，但里贝特

的结果又使他改变了主意.从 1986 年开始他又全力投入了证明费马大定理的工作.凭借他在椭圆曲线的专长,经过 7 年的努力,1993 年 6 月,在英国剑桥大学举行的一次学术讨论报告会上,他证明了:对有理数域上的一大类椭圆曲线,谷山—志村猜想成立.并说明弗雷曲线恰好属于他所说的这一大类椭圆曲线,与会者此时都明白,怀尔斯实际上是在宣布他证明了费马大定理.

因此,怀尔斯在获得菲尔茨奖后又获沃尔福奖.

§2 数学中其他现象

数学的逻辑性、数学的公理化、数学的扩张及其数学的成果等展示了数学灿烂夺目的成果和数学科学的万丈光芒.本章从另一个角度去认识一下数学,客观的记述一些数学的家丑与失误、数学的不可能问题和数学未解决的问题,从而使人们对数学有一个更真实、更全面的认识.

一、数学的"漏洞"与失误

数学中,要证明一个结论需要考虑所有可能情况与全部情况,因为数学是绝对真理.但要推翻一个结论仅需一个反例,不过寻找反例的工作是非常艰辛的.例如费马素数问题:$F_n = 2^{2^n}+1$ $(n = 0,1,2,3\cdots\cdots)$为素数,当 $n = 0,1,2,3,4$ 时,F_0,F_1,F_2,F_3,F_4 均为素数是正确的.但在 1732 年欧拉发现 $F_5 = 2^{2^5}+1 = 641\times6700417$ 已不再是素数了.这个反例的寻找用了近百年的时间.

再如科尔在回答 $2^{67}-1$ 是否是素数的问题,为解决这个两百年没能弄清的问题,整整花了 3 年中的全部星期天.在 1903 年纽约报告会上,他在黑板上算出 $2^{67}-1$,和 $193707721\times761838257287$ 结果相同,通过这两个问题已经说明了在寻找反例

的历程中的工作是非常艰辛的.

数学一些新的发现是从归纳中得到的. 因此其结论的正确性尚待证明,而在寻找反例的过程中又是非常艰苦的,这就造成了数学中的一些漏洞.

(1)费马数 $F_n = 2^{2^n} + 1(n = 0,1,2,3,\cdots\cdots)$是素数.

(2)哥德巴赫的另一猜想:

"大于1的奇数可表为素数与一个完全平方数之和",但你会发现5777无法表示为上述形式.

(3)欧拉方程猜想　在1769年欧拉证明了费马大定理 $x^3 + y^3 = z^3$ 无平常整数解时也提出一个猜想:方程 $x_1^n + x_2^n + \cdots\cdots + x_{n-1}^n = x_n^n (n \geqslant 4)$ 无整数解. 但美国数学家塞夫否定了欧拉的猜想,林格和美籍华人吴子乾发现 $27^5 + 84^5 + 110^5 + 13^5 = 144^5$.

(4)欧氏几何的第五公设问题(欧氏第五公设):

若一直线落在两直线上所构成的同旁内角和小于两直角,那么这两条直线延长,它们将在同旁内角和小于两直线角的一侧相交.

对于这一公设,因其叙述不像其他公设那么简洁明了,当时就怀疑它不像公理,而像一个定理. 欧几里得本人对这一公设也心存犹豫,因此竭力推迟使用. 几千年中人们对其耿耿于怀. 萨凯里、克里克尔、兰伯特等都作了努力,但始终都徘徊不前,非欧几何的出现,才得到一个完美的解释.

类似上述的漏洞还不少,仅以此说明数学发展中的一个现象,但这些"漏洞"并未阻碍数学的发展.

二、数学中的不可能问题

数学中存在着不可能的问题. 这些问题的出现看似平常,但人们经过千百年的探寻,才发现它是"不可能的". 可见发现它的"不可能性"并非轻松. 此处仅举几例:

1. 几何作图中的“三大”难题

由于欧几里得几何作图，只允许有限次运用直尺和圆规，因此下列作图被喻为“三大”难题，两千年来，不少人曾试图解决，但未能成功，其实这些问题是不可能问题.

(1)为圆为方问题：作一个正方形使其面积等于已知圆的面积.

(2)倍立方问题：作一个正方体使其体积等于已知正方体体积的2倍.

(3)三等分任意角问题.

2. 哥德斯堡“七桥问题”

哥德斯堡城被布勒尔河穿城而过，由两个支流在城中汇合而成，河上中间有一岛，河上有七桥：关于“能否不重复地一次走遍七桥返回原地”（详见第三部分第二章）是一个不可能问题，被欧拉证明. 但解决此题过程的方法，发展成了“图论”和“拓扑学”.

3. 五次与五次以上方程根式解问题

在人们解决二次、三次、四次代数方程的过程中得到根式解之后，人们试图寻找五次方程的根式解. 但阿贝尔证明了：一般的（一元）五次或五次以上的代数方程用根式求解不可能. 但由于五次与五次以上方程的根式解的问题的解决，创立了新的学科——群论.

4. 有理点正三角问题

在平面直角坐标系 xoy 中，等边三角形的3个顶点不可能全是有理点（两坐标均是有理数的点）.

5. 三角形的构成问题

以 $|b+c-2a|$、$|c+a-2b|$、$|a+b-2c|$（其中 a、b、$c\in\mathbf{R}$）为三边的三角形不可能存在.

证明：由三边和知，

$$(b+c-2a)+(c+a-2b)+(a+b-2c)=0 \qquad *$$

由 * 可知：$b+c-2a$，$c+a-2b$，$a+b-2c$ 中必有异号情形，或两正一负，或两负一正.

Ⅰ）若 $b+c-2a>0$，$c+a-2b>0$，$a+b-2c<0$ 则：

$$|b+c-2a| = b+c-2a \quad ①$$

$$|c+a-2b| = c+a-2b \quad ②$$

$$|a+b-2c| = 2c-a-b \quad ③$$

①+②：$|b+c-2a|+|c+a-2b| = 2c-a-b = |a+b-2c|$

发现其和等于第三边之长，与"三角形两边之和大于第三边"矛盾.

Ⅱ）若 $b+c-2a<0$，$c+a-2b<0$，$a+b-2c>0$ 则：

$$|b+c-2a| = 2a-b-c \quad ④$$

$$|c+a-2b| = 2b-c-a \quad ⑤$$

$$|a+b-2c| = a+b-2c \quad ⑥$$

④+⑤：$|b+c-2a|+|c+a-2b| = 2a-b-c+2b-c-a = a+b-2c = |a+b-2c|$

发现其和等于第三边之长，与"三角形两边之和大于第三边"矛盾.

由Ⅰ）、Ⅱ）：知 $|b+c-2a|$，$|c+a-2b|$，$|a+b-2c|$ 构不成三角形.

这样的不可能问题还不少.

三、数学中的未解决问题

同样，从数学史中发现一些问题，表面上很简单，然而却得不到解决. 这样的现象在算术、几何、代数……在初等数学和高等数学里都存在，现举例如下：

1. 初等数学中的未解决问题

如等积等周的毕达哥拉斯三角形问题. 毕达哥拉斯三角形，指边长全部是整数(或有理数)的直角三角形，其组成的数组叫毕

达拉斯数组. 人们通过不太困难的推导可以发现:面积相等的毕达哥拉斯三角形有无穷多组.

这个问题将它们具体全部找出并不是简单的事. 人们寻找的结果是:当等积的毕达哥拉斯三角形的个数 $n=2$ 时,这类图形中面积最小的毕达哥拉斯数组为(12,35,37)、(20,21,29);当等积的毕达哥拉斯三角形个数 $n=3$ 时,这类图形中面积最小的毕达哥拉斯数组为(40,42,58)、(24,70,74)、(15,112,113);当等积的毕达哥拉斯三角形的个数 $n=4$,面积为 341880 的 4 个直角三角形边长为(111,6160,6161)、(231,2960,2969)、(528,1320,1418)、(280,2442,2458),但它们不一定是面积最小的四个等积形,其他情形至今未有结果.

关于等周的毕达哥拉斯三角形的研究,人们也饶有兴趣. 通过方程 $a+b+c=l$ 和 $a^2+b^2=c^2$(a、b、c 为三边长)进行研究,也只得到一些局部结论,但对一般情形,仍为未知.

2. 欧拉长方体

欧拉认为:三条棱长、三个面对角线长以及长方体对角线都为整数的长方体不存在. 人们称此长方体为欧拉长方体.

1895 年布洛卡德在长方体三条棱互质的前提下,证明了欧拉长方体不存在. 因为其假设不妥,其证明因而错误. 至于三棱长不互质的情况,结论至今未知. 科锐(I. Kovcec)曾在 1989 年借计算机的帮助发现欧拉长方体存在,其棱长至少不小于 10^7,但无进一步结果.

3. 关于数论中未解决的问题

"数论"虽是古老的数学分支,但其未解决的问题也是大量的. 1976 年美国数学家阿波斯托尔(Abostor)在他的著作《解析数论导引》中提出 12 个数论中未能解决的问题,它们是:

(1)是否有大于 2 的偶数不是两质数之和;

(2)是否有大于 2 的偶数不是两质数之差;

(3)是否存在无穷多个孪生质数；

(4)是否存在无穷多个梅森质数；

(5)是否存在无穷多个梅森合数(形如 2^p-1 的合数，p 为质数)；

(6)是否存在无穷多个费马质数；

(7)是否存在无穷多个费马合数(即形为 $2^{2^n}+1$ 的合数)；

(8)形如 x^2+k 的质数(x 是整数，k 是给定的整数)是否有无穷多个；

(9)是否有无穷多个质数具有 x^2+k 的形式；

(10)n^2 与 $(n+1)^2$ 之间是否至少存在一个质数；

(11)$n>1$，当 n^2 与 n^2+n 之间，是否至少存在一个质数；

(12)形为 111……1 的整数中是否有无穷多个质数.

综上所述，数学上的“漏洞”是种种因素下的现象，随着数学的发展，而进行弥补和完善，然后，又推动数学的发展. 数学中的“不可能问题”，说明了数学的公正、公平、“无王者之道”，同时通过“不可能问题”的研究和证实，又衍生出了新的分支. 数学中“未解决的问题”，说明想要认识的世界是“无限的”，数学探索的空间是无限的.

同时，从哲学角度看：数学的发展、数学的成果与数学中的“漏洞”、“数学的不可能问题”、“数学未解决问题”等合在一起才是数学的全部.

参考文献

1. 吴振奎，吴健，吴昊. 数学大师的创造与失误. 天津：天津教育出版社，2004

2. 戴维·韦尔斯著. 数学与联想. 李志光译. 上海：上海教育出版

社 2000

3. By. K. C. Cole 著. 数学与头脑相遇的地方. 丘宏义译. 长春:长春出版社,2004

4. 李心灿等编. 当代数学精英. 上海:上海科学教育出版社,2002

5. 丰路. 沃尔夫与沃尔夫大奖. 数学通报,2005(7)

6. 李文林. 数学史概论. 北京:高等教育出版社,2005

7. 高隆昌. 数学及其认识. 北京:高等教育出版社,2005

8. 吴振奎. 吴旻编著. 数学的创造. 上海:上海世纪出版集团,上海教育出版社,2003

9. 王元明. 数学是什么. 南京:东南大学出版社,2003

10. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

11. [美]李学数. 数学和数学家的故事. 北京:北京新华出版社,1999

12. R · 柯朗. H · 罗宾斯著. 数学是什么. 汪浩,朱昱民译. 长沙:湖南教育出版社,1985

第八章　数学发展的趋势

前面谈到了20世纪的数学成果,可谓是硕果累累. 这些成果可反映出数学的发展趋势、数学核心领域(数学)的扩张、数学在社会各个领域的应用、计算机与数学的相互影响等等.

§1　纯数学的扩张

数学核心领域也称为纯粹数学或核心数学. 纯粹数学在19世纪分析严格化的基础上,在20世纪得到了巨大发展,在发展过程表现出下列主要趋势:①更高的抽象性;②更强的统一性;③更深入的基础探讨.

前面数学的思维特征等章节中,已提及数学的抽象性. 而更高的抽象化是20世纪纯粹数学的主要趋势或特征,这种趋势,最初主要是受到了"集合论观点的渗透"和"公理化方法的运用"两大因素的驱动.

(1)集合论观点　19世纪末由G. 康托尔所创立的集合论,最初遭到许多数学家(包括克罗内克、克莱因和庞加莱等)的反对. 但到20世纪初,这一新理论在数学中的作用越来越明显. 集合概念本身被抽象化了,集合已不必是数集或点集,而可以是任意性质的元素集合,如函数的集合、曲线的集合等等,集合论作为一种

语言进入数学的不同领域，同时也引起了数学中基本概念的变革.

(2)公理化方法　外尔曾说过："20 世纪数学的一个十分突出的方面是公理化方法所起的作用极度增长，以前公理方法仅仅用来阐明我们所建立的基础，而现在它却成为具体数学研究的工具."

我们已经知道，虽然欧几里得已用公理化方法总结了古代的几何知识，但他的公理系统是不完备的，希尔伯特在 1899 年发表的《几何基础》中则提出第一个完备的公理系统，与以往相比，希尔伯特公理化方法具有两个本质特征.

首先是希尔伯特在几何对象上达到了更深刻的抽象，欧几里得几何对所讨论的几何对象(点、线、面等)都给以描述性定义，而希尔伯特发现点、线、面的具体定义本身在数学上并不重要，它们之所以成为讨论的中心，仅仅是由于它们与所选择的公理的关系. 因此希尔伯特的公理体系虽然也是从"点、线、面"这些术语开始，把它们都视为纯粹抽象的对象，没有特定的具体内容. 这就赋予了公理系统的最大的一般性，当赋予这些抽象以具体内容时，就形成各种特殊的理论.

其次，希尔伯特考察了各公理间的相互关系，明确提出了对公理系统的基本逻辑要求，即①相容性；②独立性；③完备性. 由于上述特点，公理化方法不仅使几何学具备了严密的逻辑基础，而且逐步渗透到数学的其他领域，成为数学研究的强有力的工具.

集合论观点与公理化方法在 20 世纪逐渐成为数学抽象的范式，它们相互结合将数学的发展引向了高度抽象的道路，导致实变函数论、泛函分析、拓扑学和抽象代数等具有标志性的四大抽象分支的崛起. 这四大分支所创造的抽象语言、结构及方法，又渗透到诸多数学经典学科，推动它们在抽象基础上演化发展，现举

几例：

1. 勒贝格积分与实变函数论

集合论的观点在 20 世纪初首先引起了积分学的变革，从而导致了实变函数论的建立.

19 世纪末，分析的严格化迫使许多数学家认真考虑所谓“病态函数”，特别是不连续函数，如狄利克雷函数：

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, 当 x 为有理数 \\ 0, 当 x 为无理数 \end{cases}$$

和不可微函数. 为研究积分的概念怎样推广到更广泛的函数类（如某种间断函数），法国数学家勒贝格利用以集合论为基础的“测度”概念建立了所谓“勒贝格积分”. 与柯西和黎曼的积分概念不同，勒贝格将函数按勒贝格的意义变得可积. 在勒贝格积分的基础上可以进一步推广导数等其他微积分基本概念，并重建微积分基本定理（微分运算与积分运算的互逆性）等微积分的基本事实，从而形成了一门新的数学分支——实变函数论. 实变函数论是普通微积分的推广，它使微积分的适用范围大大扩展，引起数学分析的深刻变化.

2. 泛函分析

泛函分析是现代分析的另一大支柱.

关于“泛函”这个概念，变分法的典型问题是求积分

$$\mathrm{J}(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

的极值，其中 $y = y(x)$ 本身是一个可变函数，这样 $\mathrm{J}(y)$ 就可以看作是“函数的函数”（对每一个函数 y 有一个 $\mathrm{J}(y)$ 值相对应），也就是所谓“泛函”. 泛函的抽象理论在 19 世纪末 20 世纪初首先由意大利数学家伏尔泰拉（V. Volterra）和法国数学家阿达马开创. 由于“泛函”这个概念是由阿达马首先采用的，而伏尔泰拉称其为线函数.

泛函分析的另一个来源是积分方程(未知函数在积分号下的方程)理论. 19 世纪末,瑞典数学家弗雷德霍姆(I. Fredholm)创造了一种方法来处理某类特殊的积分方程(即弗雷德霍姆方程),这个方法揭示了积分方程与线性代数方程组之间的相似性,从而可将积分方程看成是线性代数方程组的极限情形. 希尔伯特通过严密的极限过程有效地将有限线性代数方程组的结果推广到积分方程,其中他引进无穷级数.

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$(简记为$\{a_n\}$或 a)全体组成的集合(后记为 l^2,其中任一数组诸分量的平方和都是有限数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_n^2$),并在任意两数组$\{a_n\} = a$ 和$\{b_n\} = b$ 间定义了一种叫做内积的运算,用(a,b)表示:

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

这样一个无穷集合 l^2,就构成后来所说的"希尔伯特空间",也是历史上第一个具体的无穷维空间. 希尔伯特之后,他的学生施密特(E. Schimidt)以及冯·诺依曼等人进一步研究无穷数组集合 l^2,将每个无穷组$\{a_n\}$看作是一个"点",并经过深入的几何类比,正式确定了希尔伯特空间的概念,在这类比推广中,"内积"概念扮演了关键角色.

以后数学家们又发现了其他无穷维希尔伯特空间的例子,特别是匈牙利数学家里斯(F. Riesz)和德国数学家费舍尔(E. Fischer)几乎同时建立了全体在区间$[a,b]$上平方(勒贝格)可积函数 $f(x)$的集合集合$[l^2(a,b)]$与平方可积数组 l^2 之间的等价(一一对应)关系,粗略地说,泛函分析就是在这种抽象函数空间上的微积分.

泛函分析的建立体现了在集合论影响下空间和函数这两个基本概念的进一步变革."空间"现在被理解为某类元素的集合,这些元素按习惯被称作"点",它们之间受到某种关系的约束,这

些关系被称为空间的结构，简言之，“空间”仅仅是具有某种结构的集合，而“函数”的概念则被推广为两个空间（包括一个空间到它自身）之间的元素对应（映射）关系. 其中将函数映为实数（或复数）的对应关系就是通常所称的“泛函”.

随后抽象空间理论与泛函分析有了巨大的发展，1922 年波兰数学家巴拿赫（S. Banach，1892 ~ 1945）提出了比希尔伯特空间更一般的赋范空间（后称巴拿赫空间）概念，用与角度概念无关的“范数”替代内积而定义距离及收敛性，极大地拓广了泛函分析的疆域. 并且他还建立了巴拿赫空间上的线性算子理论，证明了一批后来成为泛函分析基础的重要定理.

广义函数论也是在 20 世纪泛函分析发展中诞生的，长期以来，科学家们一直为一类奇怪的函数困扰，如狄拉克函数：

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{d}(x) = 1$$

在物理学中应用广泛，但按已有的数学概念却不能理解. 但 1945 年，法国数学家施瓦茨（L. Schwartz）将这些函数解释为广义函数，使它们有了严格的数学基础，广义函数标志着函数概念发展史上的一个新阶段.

泛函分析有力地推动了其分析分支的发展，同时泛函分析的观点与方法还广泛应用到其他科学与工程技术领域.

3. 抽象代数

在 20 世纪公理化方法向各个数学领域渗透的过程中，抽象代数的形成与发展占有特殊的地位.

在 19 世纪，代数学的对象已突破了数（包括用符号表示的数）的范畴. 在伽罗瓦之后，群的概念本身进一步发展，除了有限的、离散的群，又出现了无限群、连续群等. 代数对象的扩张，还沿

着其他途径进行，产生了许多其他的代数系统，例如，我们已提到过的四元数与超复数、域、理想等. 19 世纪数学家还引进了环.

进入 20 世纪，人们逐渐认识到这些代数系统中元素本身的内容并不重要，重要的是关联这些元素的运算（如乘法、加法）及其所服从的规则（如分配律、交换律等），于是便开始了舍弃元素的具体内容从具体代数系统向抽象代数系统的过渡. 在希尔伯特关于几何基础的工作之后，随着代数学中公理化方法系统的使用，最终确定了公理化方法在代数领域的统治地位.

通常将诺特 1921 年发表的《环中的理想论》看作是现代抽象代数的开端. 诺特用公理化方法还发展了一般理想论，奠定了抽象交换环理论的基础. 诺特 1932 年与布饶尔、哈塞合作证明了所谓“代数主定理”，成为代数发展史上的一个重大转折.

诺特的思想与方法，主要由范德瓦尔登概括与总结，写成专著，这就是 1930 ~ 1931 年间出版的二卷本《近世代数学》. 这部用透彻的公理化形式组织的抽象代数著作的问世，使抽象代数在相当长时间内成为数学家们关注的热点. 抽象代数使代数结构成为代数学研究的中心.

代数结构是由集合以及集合元素之间的一个或几个二元合成运算组成. 这里关键在于：①集合的元素是抽象的，不事先赋予具体涵义；②运算是通过公理来规定. 基于此，抽象代数的研究具有极大的一般性并能演绎出无比丰富的内容.

代数结构的研究对现代数学的发展影响深远，法国布尔巴基学派范德瓦尔登的《近世代数学》提出了一般的数学结构观点. 代数结构与“拓扑结构”和“序结构”，它们合称为“母结构”. 以这三类结构为基础，通过它们的交叉、结合而产生各种层次的新结构. 以结构的观点抽象，导致了对数学中更一般的抽象结构的研究.

4. 拓扑学

拓扑学研究对象是几何图形的连续性质,即在连续变形下保持不变的性质. 拓扑学是由欧拉的哥德斯堡七桥问题、地图四色问题(1852)等问题的研究引起的,他们均称这类问题为“位置几何”.“拓扑学”这一术语则是高斯的学生李斯廷(J. B. Listing)首先引用的(1847). 但拓扑学本质上是属于20世纪的抽象学科,庞加莱1895~1905年间发表一组论文,展开了现代拓扑学研究. 庞加莱将几何图形剖分成有限个相互连接的基本片,并用代数组合的方法研究其性质,用这样的观点加以研究的拓扑学叫做组合拓扑学. 庞加莱定义了高维流形、同胚、同调,还引进了一系列拓扑不变量,提出庞加莱对偶定理和庞加莱猜想,等等,总之,组合拓扑学是由庞加莱奠定的基础.

1926年,诺特首先洞察到群论在组合拓扑学研究中的重要意义,在她的影响下,霍普夫(H. Hopf)定义了同调群,科尔莫戈罗夫和亚历山大(J. W. Alexander)又定义了上同调群. 从拓扑到代数过渡的另一条途径是同伦(homotopy)理论,波兰数学家胡勒维茨(W. Hurewicz)是同伦论的奠基人,他引进了 n 维同伦群概念,同调论与同伦论一起推动组合拓扑学演变成利用抽象代数方法的代数拓扑学. 同调论与同伦论,始终是这一《代数拓扑学》两大支柱. 20世纪30年代中期起,一般拓扑学趋于成熟,成为第二次世界大战后数学的基础学科.

5. 概率论的公理化

20世纪前后提出的公理化方法是数学思维一大特征. 概率论的公理化,是数学抽象化的又一成果,它使这门古老的学科焕发出新的生命力.

(1)20世纪以前的概率论　概率论起源于博弈问题. 15~16世纪,意大利数学家帕乔利(L. Pacioli)、塔塔利亚和卡尔丹的著作中曾讨论过“如果两人赌博提前结束,该如何分配赌金”等概率

问题. 但作为一门独立数学分支,其真正的奠基人是雅各布·伯努利,他在遗著《猜测术》中首次提出伯努利定理:若存在一系列独立试验,事件 A 发生的概率为常数 P,那么对 $\forall \varepsilon>0$ 的试验次数 n 有:

$$p\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\} = \ >1-\eta(\eta \text{ 为任意小正数}).$$

式中

m——n 次试验中事件 A 出现的次数.

伯努利定理刻画了大量经验观测中呈现的稳定性,作为大数定律的最早形式而在概率论史上占有重要位置.

伯努利之后,拉普拉斯 1812 年在《概率的分析理论》中,以分析作为工具处理概率论的基本内容,使研究的结果系统化,在这部著作中,拉普拉斯给出了概率的古典定义:

事件 A 的概率 $P(A)$ 等于一次试验中有利于事件 A 的可能的结果数与该试验中所有可能的结果数之比.

拉普拉斯开辟了概率论的新时期. 此后极限理论的发展成为概率论研究的中心课题.

(2)科尔莫戈罗夫公理化　俄国的伯恩斯坦和奥地利的冯·米西斯,曾提出了一些公理作为概率的前提,但其理论不完备. 法国的博雷尔又提出了测度论. 数学旨在使概率论严格化. 在经历一番严格化的尝试之后,出现了科尔莫戈罗夫公理化.

科尔莫戈罗夫公理化概率论中的第一个基本概念,是所谓"基本事件集合",假设进行某种试验,这种试验在理论上应该允许任意次重复进行,每次试验都有一定的、依赖于机会的结果,所有可能结果的总体形成一个集合(空间)E,就称之为基本事件集合,对于概率论的逻辑而言,集合 E 的元素是抽象的、非具体的,正如公理化几何学中的点、线、面等一样.

E 的任意子集,即由可能的结果事件组成的任意集合,被称

为随机事件，并不是所有的随机事件都被考虑，而只考虑一定的事件域. 我们知道概率论只处理那些在某种意义上发生频率稳定的事件，而科尔莫戈罗夫的公理化理论中，对于域中的每一个事件，都有一个确定的非负实数与之对应，这个数就叫做该事件的概率. 在这里，概率的定义同样是抽象的.

科尔莫戈罗夫提出了 6 条公理，整个概率论可以从这 6 条公理出发建筑起来，他的公理系统逐渐获得了与其他数学分支同等的地位，并通过集合论与其他数学分支密切地联系着.

(3)公理化以后的概率论　概率论的公理化，使现代概率论取得了一系列理论突破.

公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点，随机过程作为随时间变化的偶然量的数学模型，是现代概率论研究的重要主题. 一类普遍的随机过程叫做马尔可夫过程，这是一种无后效性随机过程，即在已知当前的状态下，过程的未来状态与其过去状态无关. 随后莱维创立研究随机过程的新方法，提出了独立增量过程的一般理论，极大地推进了作为一类特殊马尔可夫过程的布朗运动的研究. 1934 年针对自然界中许多随机现象表现出某种平稳性，辛钦提出了平稳过程理论.

另一类有重要意义的随机过程是“鞅”. 鞅论使随机过程的研究进一步抽象化，不仅丰富了概率论的内容，而且为其他数学分支如调和分析、复变函数、位势理论等提供了有力的工具.

像任何一门公理化的数学分支一样，概率论公理化一旦完成，就允许各种具体的解释，概率论的公理化是将概率概念从频率解释抽象出来，同时又总可以从形式系统再回到现实世界，概率论的应用范围被大大拓宽了.

§2 数学的统一化

20 世纪以来,数学的发展也像其他科学一样,既越来越分化,又越来越相互渗透、结合. 20 世纪下半叶,数学科学的这种统一化趋势越来越明显. 由于不同分支领域的数学思想与数学方法相互融合,产生了一系列重大发现以及数学内部新的综合交叉学科的不断兴起,本节将 20 世纪纯粹数学的部分分支作为例子,粗略了解一点数学的统一化,去发现和感受至少从使用的数学方法方面,数学中不同分支的界限正在变得模糊.

一、微分拓扑与代数拓扑

拓扑学的基本对象是"流形". 而流形是通常曲面的推广. 如果撇开具体的曲面形象,一个 n 锥流形的抽象定义是指具有下列性质的对象——它从任何一个局部看都很像通常的 n 维欧几里得空间(R^n). 如二维球面就是一个二维流形:任意一个小片球面看上去都像一小片平面. 当然局部相像并不能推出整体相像,但这种局部相像使我们可以在任一流形的局部区域建立笛卡儿坐标系以及以其为基础的通常的微分运算. 如果能够进一步在整个流形上建立起协调一致的微分运算,就称这样的流形为"微分流形"或"光滑流形". 而"微分结构"是以微分运算为基础的、能覆盖整个流形的坐标系.

以微分流形为基本对象的拓扑学叫微分拓扑学,美国数学家惠特尼(H. Whitney,1907 ~ 1989)在《微分流形》一文,给出了微分流形的一般定义和证明了任何微分流形 M^n 总可以嵌入到高维欧氏空间作为光滑子流形,他又引进了重要的基本概念"纤维丛". 对一般的流形,还给出了作为纤维丛结构的基本不变量的惠特尼示性类.

因为惠特尼示性类的定义涉及上同调类，使得微分拓扑与代数拓扑紧密地联系起来. 事实上，微分拓扑学中广泛地使用着与同调、同伦等有关的代数拓扑方法，反过来，代数拓扑学又受到了微分拓扑学的推动.

微分拓扑学起始于20世纪50年代米尔诺"怪球"的发现. 惠特尼在微分映射的基础上，开创了奇点理论(1955)，1969年托姆在奇点分类基础上提出描述实变现象的数学模型，从而形成一门新新分支——实变理论.

二、整体微分几何

微分几何以微分为主要研究工具，而古典微分几何多是针对局部性的. 黎曼几何是在空间每一点附近建立局部的二次微分变量形式：

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j.$$

19世纪末，意大利数学家里奇(C. G. Ricci)发展了黎曼关于微分形式不变量的研究，开创了所谓"绝对微分学"，系统地研究黎曼度量在坐标变换之下的不变性质. 1917年，里奇的学生列维—奇维塔(T. Levi - Civita)引进"列维—奇维塔平移"，将欧氏空间的平行概念推广到弯曲空间，使黎曼几何具有了明显的几何意义. 后来外尔发现平行性与空间的度量性质无关，从而建立更广泛的几何理论. 1920年以后嘉当(E. Cartan)发展了一般的联络理论与活动标架法.

1925年，霍普夫注意到黎曼空间的微分几何结构与拓扑结构的关系，微分几何开始经历从局部到整体的转移.

整体微分几何以研究微分几何(小范围)性质与大范围性质之间的联系为目标. 由于纤维丛的概念反映了流形的固有的拓扑性质，它提供了从局部研究向整体研究过渡的合适机制. 因此整体微分几何的研究与微分拓扑学的结合便紧密起来. 由于纤维丛

与示性类的引入,使整体微分几何的研究出现了突破,其中陈省身在这方面有奠基性的贡献.

微分几何本来就是分析在几何中的应用.整体微分几何则表现出与现代分析更深刻的联系,特别是非线性偏微分方程理论的运用,引出了整体微分几何的重大成果,丘成桐解决了卡比拉猜想和一系列与非线性偏微分方程有关的其他几何问题.

三、代数几何

代数几何是伴随解析几何发展起来的以欧氏空间中的曲线和曲面为对象的分支,后来演变为研究若干代数方程的公共零点集(代数簇)的几何性质.直到1939年,范德瓦尔登利用交换代数的方法奠定了代数几何的新基础.1946年,韦依(A. Weil)利用抽象代数方法建立了抽象域上的代数几何理论,以后代数几何的发展便与代数拓扑、多复变函数、抽象代数、微分几何等交织在一起,并取得了重大的进展.

1955年,法国数学家塞尔(J. – P. Serre)利用拓扑学中"层"的概念建立代数簇的理论,以此为基础,格罗申迪克(A. Grothendieck)将代数簇概念推广为更一般的"概型".概型的概念使代数几何的发展进入了新阶段.它不仅统一了代数几何本身的各种理论与结果,而且使代数几何与代数数论的研究统一到共同的语言下,形成了所谓"算术代数几何",并引导了重大的突破,例如1973年德利涅(P. Deligne)用格罗申迪克理论证明了韦依猜想(一般代数簇上的黎曼猜想);法尔廷斯1983年证明莫代尔猜想等.

四、多复变函数论

单复变函数论在19世纪经以皮卡(C. E. Picard)为代表的法国函数论学派的工作已有很大发展.到20世纪30年代前后,芬兰数学家奈凡林那(R. H. Nevanlinna)建立了统一的亚纯函数值分

布理论——奈凡林那理论. 奈凡林那的学生阿尔福斯(L. V. Ahlfors)将拓扑方法引入奈凡林那理论的研究,建立了所谓覆盖面理论,作出了新的重大贡献. 单复变函数论20世纪在黎曼曲面与单值比、拟共形映照等方面都有重要进展,1984年,德布兰奇(L. de Blanges)还证明了比贝巴赫(L. Bieberbach)猜想(对单位圆内的单叶解析函数).

多复变函数论是单复变函数论的自然推广,但多变量情形的复杂性使这种推广在1950年以前进展缓慢. 但到20世纪下半叶,由于综合运用了拓扑学、微分几何、偏微方程论以及抽象代数等领域的概念与方法,多复变函数论的研究取得了长足的进步.

五、动力系统

庞加莱关于常微分方程定性理论的一系列课题,成为动力系统理论的出发点. 美国数学家伯克霍夫(G. D. Birkhoff, 1884 ~ 1944)从1912年起以三体问题为背景,扩展了动力系统的研究. 1937年,庞特里亚金提出结构稳定性概念,要求在微小扰动下保持相图(拓扑结构)不变,使动力系统的研究向大范围转化.

动力系统的研究由于拓扑方法与分析方法的有力结合而取得了重大进步,借助于计算机模拟又引发具有异常复杂性的混沌、分岔、分形理论,这方面的研究涉及众多的数学分支.

1925年莫尔斯(H. M. Morse, 1892 ~ 1977)推广伯克霍夫动力系统理论中极小极大原理,得到莫尔斯不等式,以后又发展成所谓"莫尔斯理论",即可微函数的临界点的理论. 临界点理论应用于变分问题就得到大范围变分法. 它们与微分拓扑学一起构成一个相互交叉、相互影响的学科群.

六、偏微分方程与泛函分析

偏微分方程论19世纪是以幂级数为工具来研究的. 在20世

纪,采取了泛函分析的观点与方法从而打开了新局面.用抽象空间上的微分算子来表述偏微分方程并应用各种泛函分析的方法加以研究,由新方法、新思想的植入引出了偏微分方程论的许多重要成果.1965年霍尔曼德与尼伦伯格等又共同发展了一般的微分算子理论.这理论是工具性的.

现代偏微分方程论与拓扑学、微分几何、多复变函数论等分支都有密切的联系.

七、随机分析

20世纪引进的随机积分与随机微分方程,为随机分析的发展奠定了基础.从此使得概率论向分析与几何领域渗透日益加剧,随之产生随机微分几何、无穷维随机分析等领域.1976年马利安文(P. Malliavin)等用随机分析方法重新证明了阿蒂亚—辛格指标定理和偏微分椭圆算子的霍尔曼德定理,更加深刻地揭示了随机性数学与决定性数学的内在统一性.可以发现随机分析的研究发展迅速,并与理论物理密切相关.

由上述几例可见:数学的有机统一,是这门科学在20世纪呈现的特点.按照希尔伯特的观点:"数学理论越是向前发展,它的结构就变得越加调和一致,并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也显露出原先意想不到的关系.因此随着数学的发展,它的有机的特性不会丧失,只会更清楚地呈现出来."20世纪数学的发展,证实了希尔伯特的看法.尽管现代数学分支繁多,在作为整体的数学中,却仍使用着相同的工具与算法,存在着概念的亲缘关系.数学内部的这种统一性,也正是它能够作为科学的普遍语言的根源所在,必然对它所应用的科学技术领域带来深远影响.所有这些是与数学家们对联系数学中不同领域与分支、追求统一目标的工作分不开的,数学科学的统一性将有保持下去的趋势.

§3　对基础的深入探讨

数学的严格基础，自古以来就是数学家们追求的目标. 这样的追求，在20世纪以前曾经历过两次巨大的考验. 随着19世纪末分析严格化的最高成就——集合论的出现，似乎给数学家们带来了一劳永逸地摆脱基础危机的希望. 集合论出现之后，尽管其相容性还未得到证明，庞加莱却在1900年巴黎国际数学家大会上宣称："现在我们可以说，完全的严格性已经达到了！"但就在第二年，英国数学家罗素(B. Russell)却以一个简单明了的集合论"悖论"，又引起了关于数学基础的新的争论. 这个现象，说明了对数学基础进行探讨是必要的. 那么对数学基础的更深入的探讨，自然就成为20世纪纯粹数学的又一重要特征.

一、集合论悖论所引发的

罗素的悖论是：把所有不属于自己的那些集合记为 T，试问集合 T 是否也是一种不属于自己的集合?

即构造 $T = \{x \mid x \in x\}$ 试问 $T \in T$ 是否成立?

无论出现 $T \in T$ 或 $T \notin T$ 哪一种情况，都将导出矛盾的结论.

1919年罗素又给上述悖论以通俗的形式，即所谓"理发师悖论"：某乡村理发师宣布了一条原则，他给所有不给自己刮脸的人刮脸，并且只给村里这样的人刮脸. 试问：理发师是否自己给自己刮脸? 如果他给自己刮脸，他就不符合他提出的原则，因此他不应该给自己刮脸；如果他不给自己刮脸，那么根据他的原则，他就应该给自己刮脸.

为了消除悖论，数学家们付出了很大努力将康托尔以相当随意的方式叙述的"朴素集合论"加以公理化. 通过对集合类型加以适当限制(满足一定的公理)，起到了避免罗素悖论的作用，而所

加限制使康托尔集合论中对于经典分析所需要的主要内容得以保留. 任何公理系统都必须解决相容性的问题,但策梅洛—弗兰克尔系统的相容性尚无证明. 因此庞加莱担心:“为了防狼,羊群已经用篱笆圈起来了,但却不知道圈内有没有狼.”尽管如此,集合论的语言和工具性已得到广泛使用.

二、数学基础的三大学派

随着对数学基础的深入探讨,认为寻求类似悖论解决的尝试,应从逻辑上去找问题的根源. 针对集合论,公理化运动假定了——数学运用的逻辑本身的可靠性. 数学家们基于以前形成的不同观点,构成关于数学基础的三大学派.

(1)逻辑主义学派　逻辑主义基于于罗素 1903 年发展的《数学的原理》的轮廓. 按照罗素的观点:“数学就是逻辑.”全部数学可以由逻辑推导出来——数学概念可借逻辑确定概念定义,数学定理可以由逻辑公理按逻辑推出. 至于逻辑的展开则依靠公理化方法进行,通过符号演算的形式来建立整个逻辑体系. 为了达到这个目标,为了避免悖论,还创造了一套“类型论”,其代表人物是罗素.

(2)直觉主义学派　直觉主义对于数学基础采取了与逻辑主义对立的观点,其中杰罗内克、庞加莱是直觉主义的先驱,布劳威尔是创始人. 直觉主义的基本思想:数学独立于逻辑,数学基础是一种能使人认识“知觉单位”1 以及自然数列的知觉. 坚持以数学对象的“构造性”定义作为直觉主义的精粹,直觉主义关于有限的可创造性的主张造成了对古典数学中普遍接受的“排中律”的否定. 直觉主义者认为,排中律仅存在于有限集合中,对无穷集合不能使用.

(3)形式主义学派　形式主义纲领的主张是:使数学成为彻底形式化的一个系统. 在这个形式系统中,人们必须以逻辑的方

法进行数学语言的公式表述，并用形式的程序进行推理，确定一个公式——确定这个公式蕴含的另一个公式——再确定第二个公式，以此类推，数学证明由这样一条公式链构成. 对于任何形式系统的确立其相容性是形式主义纲领，希尔伯特提出了“元数论”或“证明论”的设想，成为形式主义纲领的核心，其代表人物是希尔伯特.

三大学派在20世纪初的30余年时间非常活跃，争论也极为激烈，都企图以自己的主张统一数学. 事实上到后来，这三大学派都未对数学基础问题作出令人满意的解答. 但三大学派的论争客观上把后来对数学的认识引向深化. 三大学派在数学方面的深刻认识和积累的结果，后来也都被吸纳到数理逻辑研究之中，推动着现代数理逻辑的形成和发展.

§4　数理逻辑的发展

数理逻辑是数学的重要特征. 以数学的方法研究逻辑，最先为莱布尼茨所提倡. 现代数理逻辑的内容和方法，是在20世纪初数学基础争论中发展起来的，现代数理逻辑的四大分支有公理化集合论、证明论、模型论和递归论，都和数学基础问题的探讨有一定的联系.

一、公理化集合论

为消除集合论悖论而产生的第一个集合论公理系统是策梅洛—弗兰克尔系统(Z－F系统). 虽然Z－F系统本身的相容性问题远未解决，但已引出了数理逻辑的重大成果，其中最显著的是关于连续统假设的进展.

连续统假设是集合论中的一个基本问题(见希尔伯特23题的第1个问题)，在公理化集合论形成以后，数学家们自然地关注

它在集合论公理系统中的地位和连续统假设能否由给定的公理系统形式地得到证明等一系列问题. 为此 1938 年哥德尔首先证明了广义连续统假设与策梅洛—弗兰克尔公理系统是相容的,同时还证明了另一条重要的集合论公理"选择公理"与 Z-F 系统的相容性. 几年后柯恩的证明是借助于建造一个 Z-F 模型,在其中连续统假设是假的. 为了给出这样的模型,他还创造了著名的"力迫法",力迫法现已在证明许多数学命题独立性中使用.

柯恩的结果意味着连续统假设在 Z-F 系统中不可证明,而根据哥德尔的结果,连续统假设在 Z-F 中不可否证. 这两个结果合起来告诉我们:在 Z-F 系统中,连续统假设是一个不可判定的问题. 可以被看作是希尔伯特第一问题的否定解决. 这时的公理化集合论面临着类似几何学中证明了平行公设独立性后的形势,即存在着连续统假设在其中不成立的集合论,有人称之为"非康托尔集合论". 然而对柯恩独立性结果的意义,数学家们的意见不统一. 甚至有些学者因为对连续统假设本身产生怀疑,试图用新的公理来代替. 这些都预示着公理化集合论的研究将向纵深推进.

二、证明论

希尔伯特开拓的证明论引出了哥德尔不完全性定理. 在哥德尔之后,证明论没有止步仍然向前发展. 首先是数学家们在放宽工具限制的情况下继续寻求相容性证明. 1936 年,甘岑采用超限归纳法证明了算术公理系统的相容性. 后来,又有人证明了数学分析某些片断的相容性. 除了相容性证明,证明论还应用到包括证明的结构及复杂度等问题的研究中去.

三、模型论

在哥德尔不完全定理之后，波兰数学家塔斯基(A. Tarski)针对形式语言真假问题，开创了研究形式语言及其解释(模型)之间关系的模型论. 模型论这一重大成果标志着非标准分析的建立. 1960 年，美国数理逻辑学家罗宾逊(A. Robinson)用模型论的方法证明了实数结构可以扩张为包含无限小和无穷大数的结构，并在这种扩张实数结构上展示经典数学分析，从而创立了所谓"非标准分析". 非标准分析使无限小概念第一次获得了可靠的逻辑基础. 目前，非标准分析方法已被广泛地应用.

四、递归论

哥德尔在不完全性定理的研究中提出的"原始递归函数"概念，成为算法理论的新起点. 1936 年左右，几乎同时出现了 3 种描述算法的数学模型：①克林(S. C. Kleene)在改进哥德尔首先引进的原始递归函数基础上提出的一般递归函数；②克林与丘奇(A. Church)引进的 λ-可定义函数；③图灵与波斯特(E. L. Post)各自独立定义的图灵可计算函数. 由于发现这 3 种可计算函数是相互等价的，于是丘奇遂断言一切算法可计算的函数都是一般递归函数，这就是"丘奇论题".

判断给定数学问题是否可计算或存在算法解，统称判定问题. 判定问题是递归论的主要课题. 有许多著名的判定问题，它们的解决在数学上关系重大. 如希尔伯特第十问题，寻求判定任一给定的丢番图方程(整系数不定方程)有无整数解的一般算法，普特南对此问题做出了贡献. 1970 年，前苏联数学家马蒂雅舍维奇最终证明了希尔伯特期望的一般算法是不存在的. 这是对古老的算法概念进行精密探讨而引出的深刻结果，被认为是 20 世纪重大的数学成果之一.

§5 数学的应用

数学的广泛渗透与应用,是数学学科的又一特点,在20世纪的数学中更鲜明地反映出来. 20世纪的数学不仅是纯数学形成的时代,也应该是应用数学的时代,尤其在20世纪40年代计算机问世以来,数学已渗透到社会各个角落,这就为它的应用提供了空间,又给其应用提供了工具.

数学科学与其他自然科学存在深厚的联系和应用已有历史. 但数学的存在和发展也离不开其他科学.

数学向另一门科学渗透的形式表现为一些交叉分支,这类分支大量地、系统地应用各种数学工具. 但一般说来,它们在数学方法上并不独立. 但20世纪应用数学已发展成了具有自己的数学方法、相对独立的应用学科(如运筹学、控制论数理统计等).

这里对应用数学、数学的应用等作一简单介绍.

1. 数理统计

简单的统计自古就有,但以概率论为基础、以统计推断为主要内容的现代意义的数理统计学,成熟于20世纪.

1763年,英国人贝叶斯(T. Bayes)发表《论机会学说问题的求解》,其中的“贝叶斯定理”给出了在已知结果E后,对所有原因C计算其条件概率(后验概率)$P_E(C)$的公式,可以看作是最早的一种统计推断程序. 拉普拉斯和高斯等利用贝叶斯公式估计参数,特别是高斯,由于计算行星轨道的需要建立了以“最小二乘法”为基础的误差分析(1763~1809),这些都促使统计学摆脱对观测数据的单纯描述而向强调推断的阶段过渡.

20世纪中叶皮尔逊发展了高尔顿提出的“相关”和“回归”理论,为代数理论统计起了重要作用,创立了生物统计学. 他是“大样本抽样”的先驱. 费希尔开辟了多元统计分析方向成为另一支

重要统计的先驱. 1946 年瑞典数学家克拉默发表了《统计学的数学方法》的测度论,标志着现代数理统计学的成熟.

沃尔德用博弈的观点看待数理统计问题. 他还定义了统计推断程序的风险函数,用以判别推断程序的好坏. 沃尔德 1950 年发表《统计决策函数》一书. 沃尔德在他的统计研究中积极地利用先验概率与贝叶斯定理,由于同费希尔学派回避摒弃先验概率的做法不同,因而引起极大反响. 20 世纪,数学家们围绕着先验概率和贝叶斯定理发展了生物统计学和它在数理统计的作用. 体现了数学的应用.

2. 运筹学

运筹学(operations research)是第二次世界大战后创立的. 在第二次世界大战中,英国空军发现空防雷达送来的信息需要加以协调,才能使雷达、战斗机系统在配合上达到满意的作战效果. 当时成立了专门的运筹小组开展了类似的研究. 运筹研究在 1940 年英国对付德军空袭的战斗中屡建奇功. 第二次世界大战后由于一些人的倡导,运筹学被引入民用部门,研究内容不断扩充,从而形成一门蓬勃发展的新兴的应用学科. 目前,它已包括有数学规划论、博弈论、排队论、决策分析、图论、可靠性数学理论、库存论、搜索论等许多分支,统筹与优选也被列入运筹学的范畴,运筹学就是运用这些数学方法来解决生产、国防、商业和其他领域中的安排、筹划、控制、管理等有关的问题.

其中,数学规划论是运筹学中一个基本而又庞大的领域,这个领域里线性规划论则是发展最早和比较成熟的分支. 如今也已编入高中教材.

例如实际问题(利润、安全等)需要将某些对象(支出、风险等)最大化或最小化,数学规划就是为这类实际问题提供数学模型的一种方法. 单纯形法在实用上非常有效. 1984 年,美国贝尔实验室 28 岁的数学家卡玛卡终于发明了一种多项式时间的线性规

划算法“卡玛卡算法”. 此法优于单纯形法.

通过探讨目标函数和约束条件的不同情况,数学家们对线性规划论沿不同的方向推广.

3. 控制论

控制论也是在第二次世界大战期间新兴的应用学科. 控制论的创始人维纳(N. Wiener,1894 ~ 1964),在第二次世界大战中接受了一项与火力控制有关的研究:设计一种能有效地指挥高射炮的装置. 它也是维纳创立控制论的主要来源之一.

控制论的另一个实际来源是通信“滤波问题(filtering)”. 在通信过程中一个信息往往被外来信息(噪声)干扰. 长期以来,人们梦想设计一种能过滤噪声、复原信息的装置——滤波器,维纳从 1930 年起就对这方面的问题予以关注.

为了建立控制论,维纳从 1940 年初开始,与电工学家、生理学家、计算机设计家、通信工程师以及其他数学家展开了极其广泛的合作. 1948 年,维纳终于出版了他的名著《控制论》(Cybernetics),宣告了控制论这门学科的诞生. 维纳的控制论被称为“经典控制论”后又推广发展. 控制论后来发展为更一般的关于信息加工、存储和分析理论的同时也解决了一大批相关实际问题.

4. 计算机与现代数学

(1)计算机对于数学的支持和影响　20 世纪四五十年代电子计算机问世,对数学和人类世界是不小的震动. 电子计算机是数学与工程技术的结合物,是抽象数学应用的典型例证. 计算机反过来又对数学进行“反哺”. 计算机的出现对于数学的影响和支持表现在:①计算机成为数学研究的崭新手段,如科学计算、数字模拟、图像显示等;②对计算机的更新和使用中的新问题,又要从数学中获得支持,又为数学中的分支增添了活力;③利用计算机去设计计算机的未来,实现自身的完善. 计算机与数学的关系越来越密切.

（2）纯粹数学研究与计算机　随着计算机的发展，纯粹数学正在获得丰厚的回报. 计算机已进入越来越多的数学领域，并且常常带来意想不到的成果. 数学家只用纸和笔的时代将成为过去. 例如：

——借助于电子计算机证明了地图四色定理，这是用计算机解决重大数学问题的第一个鼓舞人心的范例.

——在计算机上进行人工不可能完成的巨量计算，不仅使数学家克服了大量的艰巨运算造成的困难定理得以证明，而且还帮助他们猜测新的事实、发现新的定理. 如孤立子（soliton）和混沌（chaos）的发现，它们都可以看作是20世纪的重大数学成就. 通过计算机数值实验意外发现孤立子，相互碰撞后各自保持波形、速度不变，在计算机屏幕上显示出来的却与人们以往的直觉猜测具有相反的波动性质.

——混沌动力学是依赖计算机开辟出来的数学分支. 复动力系统的迭代过程很早就引起数学家们的浓厚兴趣. 法国数学家朱利亚（G. M. Julia）和法图（P. J. L. Fatou）曾率先研究过动力学定律$f(x) = x^2 + c$（x和c均取复值，c为参数）产生的图像，并指出了参数c的选择对图像的性质影响至关重要. 1980年朱利亚的学生蒙德尔布罗利用计算机画出一批图像，这些图像对于不同数值c的结构给予展示. 这样，蒙德尔布罗用计算机开辟了一个新的数学分支——混沌动力学.

5. 计算机科学中的数学

自从第一台电子计算问世以来，计算机以惊人的速度发展. 体积缩小，速度提高，功能增多，计算机的这种变革与进步，从另一个方向刺激着理论数学的发展. 现代计算机科学的发展不仅离不开数理逻辑，而且要借助数论、代数、组合数学乃至代数几何等众多数学分支的概念、方法与理论，新型计算机的研制还不时地呼唤着新的数学思想.

（1）组合数学　组合数学也称组合分析或组合论，发源古老.中国古代传说中有“洛书图”，东汉郑玄（129～200）注《周易》则称“九宫数”，这是最早的幻方（3阶后至宋出现“十阶”幻方），这是古老的组合数学.不过，近代意义的组合数学则是从莱布尼茨1666年发表《组合的艺术》（De Arte Combination）为起点的.“组合”这个名词正是他首先引进的.18、19世纪的数学家提出了一系列著名的组合数学（包括图论）的问题，如：

哥德斯堡七桥问题（欧拉，1736）.

36军官问题（欧拉，1781）.36名军官来自6个不同的军团，每个军团6名且分属6种不同的军阶，问能否将他们排成一个方阵，使得每行每列的6名军官正好来自6个不同军团？

柯克曼女生问题（T. Kirkman，1850）.女教师要为其女学生安排下午散步的日程，15人分成5组，每组3人，使得一周7个下午每两位女生恰好见一次面；

哈密顿环球旅行问题（W. T. Hamilton，1856）.已知一个由一些城市和连接这些城市的道路组成的网络，问是否存在一条旅行路线，使起点和终点都在同一个城市，而其他每个城市恰好都经过一次.

早期的组合数学是这类带趣味性和益智功能的问题，当组合数学逐渐与数论、概率统计、拓扑学以及线性规划等领域的问题交织在一起，使其显示出理论和应用上的重要价值.在20世纪下半叶，与电子计算机发展的结合使古老的组合数学获得了新的生机.

（2）模糊数学　1965年，美国数学家扎德（L. A. Zadeh）发表论文《模糊集合》，开辟了一门新的数学分支——模糊数学.

模糊集合是经典集合概念的推广.由于集合论是现代数学的重要基石，因此模糊集合的概念对数学也产生了广泛的影响.人们将模糊集合渗透到数学的各个分支从而出现了模糊拓扑、模糊

群论、模糊测度与积分、模糊图论等等. 这些统称模糊数学.

实际上,模糊性是事物复杂性表现的一个方面,随着电子计算机的发展以及它对日益复杂的系统的应用,处理模糊性问题的要求也比以往显得突出. 再者人脑的思维包括有精确的与模糊的两个方面,因此模糊数学在人工智能模拟方面具有重要意义.

模糊数学是20世纪数学发展中的新事物,尽管它在理论上还不够成熟,方法上也未臻统一,它将在计算机科学的发展中进一步完善.

(3)机器证明　计算机发展的最终目标是模拟人类智能,用机器代替人的思维而不仅仅是进行计算. 20世纪展现了制造人工智能机器的曙光,但其技术困难表明这方面的条件尚不成熟. 此后科学家们将目光更多地倾注于智能软件,有些已取得了进步.

机器证明定理展示了计算机在人工智能发展中的美好前景,譬如美籍华人王浩在1960年公布了他的成果,在一台速度不高的计算机(IBM704)上证明了罗素—怀特黑德《数学原理》中一阶逻辑部分的全部350条定理. 1976年以后,中国数学家吴文俊开辟了一条机器证明定理的代数化途径.

机器证明定理在1980年以后又有了很多的推进. 随着时代的发展和人类的需要,20世纪下半叶计算机与数学科学之间的相互作用与相互影响日益加强.

参考文献

1. 王梓坤. 今日数学及其应用. 数学通报,1994(7)
2. 李心灿等编. 当代数学精英. 上海:上海科学教育出版社,2002
3. 丰路. 沃尔夫与沃尔夫大奖. 数学通报,2005(7)
4. 李文林. 数学史概论. 北京:高等教育出版社,2005

5. 高隆昌. 数学及其认识. 北京:高等教育出版社,2005

6. 吴振奎,吴昊编著. 数学的创造. 上海:上海世纪出版集团,上海教育出版社,2003

7. 王元明. 数学是什么. 南京:东南大学出版社,2003

8. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

9. [美]李学数. 数学和数学家的故事. 北京:北京新华出版社,1999

10. 周春荔,张景斌. 数学学科教育学. 北京:首都师范大学出版社,2003

11. 顾泠沅,易凌峰,聂必凯. 寻找中间地带. 上海:上海世纪出版集团,上海教育出版社,2009

12. 张奠宙,宋乃庆主编. 数学教育概论. 北京:高等教育出版社,2004

第二部分　数学学习理论

数学发展到今天，数学的发展和社会的进化联系越来越密切. 数学的发展依赖于社会环境，受着经济、政治、文化诸因素的影响；同时数学的发展反过来对人类社会的进步起推动作用，包括对人类物质文明、精神文明的影响. 数学社会化成为现代化的重要标志. 因此，当代社会越来越关注数学的价值和数学学习.

心理科学也在发展，20 世纪 60～70 年代，心理学领域发生两件大事：一是出现了所谓认知心理学革命；二是教育心理学中出现了专门研究课堂教学过程的分支学科——教学心理学. 这两件大事与教育理论及教学实践的关系很密切. 这两个事件表明，心理学的研究方向已从研究人的行为转向研究人的认知，从而出现一些新的教育理论. 因此，心理学革命对于人们日益看重的数学教育和数学学习，提供了有利的心理科学理论. 1972 年，在英国埃克塞特第二届国际数学教育大会上，针对数学教育心理进行了专题讨论，并建立了永久性的团体——国际数学教育心理组织. 大会“关于数学学习过程的研究”的报告是数学学习心理学教学的里程碑. 我们这一部分是尝试将心理学理论与数学学习实践结合起来，达到促进数学学习. 作者认为：从事数学学习的个体应是心智健康（不存在智障）的人，如图 2－0－1.

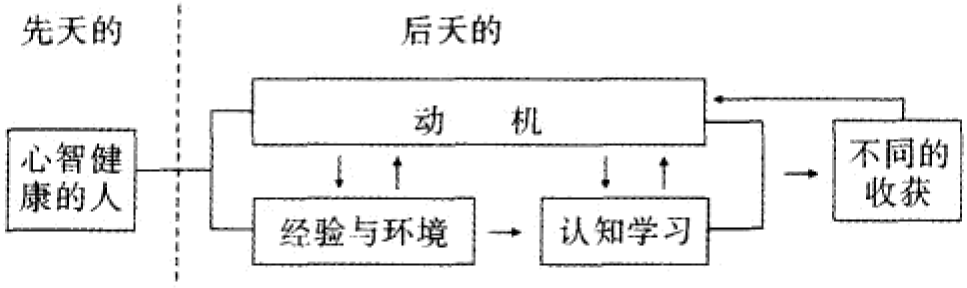


图 2-0-1

第一章　学习的个体

中小学教育的对象是青少年学生. 在学生这个集合里,是由一个一个学生(个体)组成的,学生是学习的主体,单个学生是学习的个体. 根据辩证唯物论的观点:学习的个体之间存在着差异. 心理教育学家皮连生说,个体上的差异是指不同个体之间在行为上相对稳定的不相似性,其主要表现在心理和生理两个方面. 个体差异又叫人性差异、性格差异. 个体差异是心理学研究的主要课题.

§1 差异论

一、人格差异

1. 关于差异论

早在两千年以前，孔子已涉及过人格差异，孔子将人分为“君子”与“小人”. 孔子将宰予斥“朽木”，对“闻一知十”的颜回却大加颂扬. 孔子还将人分成“生而知之”者、“学而知之”者、“困而学之”者、“困而不学”者四种，足见人之差异. 分析心理学派创始人荣格(Carl Gustav Jung. 1875 ~ 1961)提出人格类型说，人是有差异的，但根据统计规律性，个别人格虽有差异，但也有共同点. 他在研究中发现，不同性格类型的人，其情结的表现有所不同，他在《心理类型》一书中，将人的性格类型分为内向、外向两种态度类型，而后又进一步划分为直觉、感觉、思维、情感四种功能类型. 将态度类型和功能类型组合后为：外向感觉型、外向直觉型、外向思维型、外向情感型、内向感觉型、内向直觉型、内向思维型、内向情感型. 在荣格看来，每个人身上都会程度不同地表现出一种占优势的性格类型. 这里荣格强调人与人之间不同的性格差异.

后来，日本的古川竹二、德国的斯普兰格各自依照着自己的标准将人格分类. 总之，人格之间存在类型差异.

2. 人格特质差异

特质论者认为，一种恰当的人格理论，应该有测量人格的单位，这种单位叫特质. 人格特质人所共有，但每种特质在量上有不同，因而形成人与人之间在性格上的差异. 关于人格特质的研究在美英两国较为盛行.

人格特质差异的研究，可分为两类：一类为非统计研究，以阿尔波特为代表，划分人格特质，采用的方法是逻辑分析和语义分

析，偏重于个体各种人格特质的质，比较强调特质之间的独立性.另一类为统计性研究，划分人格特质主要采用因素分析的方法，偏重于个体间人格特质的差异.这类研究的代表是卡特尔和英国的艾森克.

例如，通过心理测试，获得在不同情境中人的行为发生的频率、广度、强度的大量资料，经过周密的逻辑分析和语义分析求得个体人格的各种特质.一方面特质具有集中性，一种人格特质在特殊场合和人群中才表现出来.如具有攻击性的人，在某场合对某个人才会产生攻击行为.另一方面人格特质具有普遍性.一种人格特质联系着许多刺激和反应，使个体行为产生广泛的类似性.这一种是非统计性研究.

又如，美国卡特尔在研究时首先收集原始资料：一是个体日常生活和社会生活记录；二是让个人自评人格特质的问卷；三是进行客观测验.然后对这三类资料进行分析.a、b、c、d、e、f、g 几种行为中，其中 a、b、c、d 四种行为是不独立出现的，而是如 a 与 b、a 与 c、b 与 c、c 与 d，他把这一些认为是实质上的高相关.作为一个功能单位 e、f、g 也是一同出现，也是实质的高相关，也组成一个功能单位.这些功能单位叫人格差异单元.不同的结构单元，就是两个不同人格特质.

3. 影响人格差异的因素

个体性格差异的原因，是人格理论要回答的重要问题.围绕这一问题提出的理论有多种.荣格认为人格整体论（心灵）是一个先天性的概念.笛卡儿提出心身交感论，把人的物质实体（身体）和精神实体（心灵）都归因为上帝的产物.华生否认遗传和本能的作用，提出环境决定论和教育万能论.对于人格差异的种种观点，环境论和选择论都各执一词.对于种种观点，皮连生教授说无外乎如何看待先天遗传因素和后天学习因素，在人格差异形成中各起多大作用.作者认为作为一个健康人来说，个性差异是个体与

环境相互作用的结果,即学习的结果. 但不排除先天遗传基因的因素. 譬如高斯 2 ~ 3 岁时能判断其父亲计算的错误,并说出正确结果,就说明单纯用后天学习来解释是不完全的. 这一点与当前流行的观点相同,即先天的素质和后天学习,通过交互作用后最终形成个体人格特征的.

因此,各种研究表明,对学习(包括数学学习)有影响的人格特征有:动机与兴趣、智力与认知方式、性格与气质.

二、学生的认知差异

认知过程是指学生借以获得知识(心理学称为信息)、作出计划、解决问题的心理过程. 在此过程中存在学生(或个体)之间在认知方式和认知能力等方面的差异.

1. 认知方式的差异

认知方式,又称认知风格,是学习者(或个体)在知觉、思维、记忆和解决问题等认知活动中在加工和组织知识(或信息)方面表现出的独特而稳定的风格. 其认知方式的差异主要表现在:

(1)场独立和场依存　场独立和场依存两个概念最初来源于威特金对知觉的研究. 研究发现,知觉方式分为场独立方式和场依存方式. 这两种方式是普遍存在的认知方式. 具有场独立方式的人,对客观事物作判断时,常常利用自己内部的参照,不易受外来因素的影响和干扰,在认知方面独立于他们的周围背景,倾向于在更抽象的和分析的水平上加工,独立对事物作出判断. 具有场依存方式的人,对物体的知觉倾向于以外部参照作为信息加工的依据. 他们的态度和自我知觉更易受周围的人们,特别是权威人士的影响和干扰,善于察言观色,注意并记忆言语信息中的社会内容.

(2)沉思型与冲动型　在有几种可能解答的问题情境中,有些儿童倾向于深思熟虑且错误较少,这种认知方式被称为沉思型

认知方式. 另一些儿童倾向于很快地检验假设,且常常出错. 这种认知方式被称为冲动型认知方式. 冲动与沉思涉及在很不确定的情境中,个人对自己解答有效性的思考程度. 其标准是反应时间与精确性. 研究表明,大致 30% 的学前儿童和小学儿童属于冲动型. 当然,有些反应快的人,不一定属于冲动型,因为他们的反应既快又准确. 这可能是由于他们对任务很熟悉,或者是由于他们的思维很敏捷的缘故.

(3)辐合型与发散型　据美国的吉尔福德(J. P. Guilford)研究,辐合型认知方式是指个体在解决问题过程中常表现出辐合思维的特征,表现为搜集或综合信息与知识,运用逻辑规律,缩小解答范围,直至找到最适当的惟一正确的解答. 而发散型认知方式则是指个体在解决问题过程中常表现出发散思维的特征,表现为个人的思维沿着许多不同的方向扩展,使观念发散到各个有关方面,最终产生多种可能的答案而不是惟一正确的答案,因而容易产生有创见的新颖观念.

2. 智力与智力测量

在长期数学教学实践中发现,有些学生学习速度快,一教就会,甚至能做到无师自通. 有些学习速度慢,虽然能教会,但必须有适当的方法和充足的时间. 聪明或不聪明显然是个人的一种稳定的特征. 这也就体现心理测量学上所讲的智力概念的基本含义.

(1)比率智商　心理测量学家为了对人的聪明程度做定量分析,心理学家创造了许多测量工具,这些测量工具被称作智力量表. 世界上最著名的智力量表是斯坦福—比纳量表(简称 S－B 量表). 该量表最初由法国比纳(A. Binet)和西蒙(T. Simon)于 1905 年编制,后被引入美国,由斯坦福大学的推孟(L. M. Terman)作了多次修订而闻名于世.

智力测验中的一个重要概念是智商(intelligence quotient),简

称 IQ. 这里用比率智商公式表示为：

$$IQ = \frac{智力年龄(MA)}{实际年龄(CA)} \times 100$$

上述公式中的实际年龄指从出生到进行智力测验时的年龄，简称 CA. 智力年龄是根据智力测验计算出来的相对年龄，简称 MA. 智力测验的题目按年龄分组，例如适合 6 岁儿童的题目放在 6 岁组，适合 7 岁儿童的题目放在 7 岁组，以此类推. 随着年龄升高，题目的难度也增大. 如果 6 岁儿童全部通过 6 岁组的测题，则该儿童的智力年龄（简称智龄）与他的实际年龄（简称实龄）一致. 如果一名 6 岁儿童不仅通过了 6 岁组的题目，而且通过了 7 岁组的题目，那么他的智龄是 7. 将该儿童的实龄数与智龄数代入上述公式，得该儿童的智商：

$$IQ = \frac{7}{6} \times 100 \approx 117$$

（2）离差智商　1936 年，美国的韦克斯勒（D. Wechsler）又编制了智力量表，包括学龄前智力量表（WPPIS）、儿童智力量表（WISC）和成人智力量表（WAIS）. 韦克斯勒儿童智力量表适用于 6 岁至 16 岁儿童，由 12 个分测验组成，其中言语分测验 6 个，操作分测验 6 个，每个分测验的测题都是由易到难编排的. 该量表仍采用智商的概念，但这里的智商是以同年龄组被试的总体平均数为标准确定的，称为离差智商. 公式为：

$$IQ = 100 + 15\left(\frac{x - \bar{x}}{S}\right)$$

式中

x——个体测验分数；

$\bar{x}$——同年龄组的平均分数；

S——标准差.

离差智商假定同年龄组测量成绩总平均数为 100，用个人实

际得分与总平均数比较,确定其在同龄组内所处的相对位置,以此判定其智力水平.

3. **智力的差异**

由于智力是个体先天禀赋和后天环境相互作用的结果,个体智力的发展存在明显的差异,包括个体差异和群体差异.

(1)智力的个体差异　智力的个体差异反映在个体间和个体内. 个体间的差异指个人与其同龄团体的常模比较表现出来的差异. 大量的研究表明,人们的智力水平呈常态分布(又称钟形分布). 也就是说,在人数量相当多的同龄人中,个人智商分数发生概率符合图 2-1-1. 图中的百分数表示一定智商分数之间的概率. 从图 2-1-1 可见,IQ 在 85~115 之间的概率为 68%,IQ 在 85~115 之间的聪明程度属中等. 智商分数极高与极低的人很少. 一般认为,IQ 超过 140 的人属于天才,他们在人口中概率不到 1%.

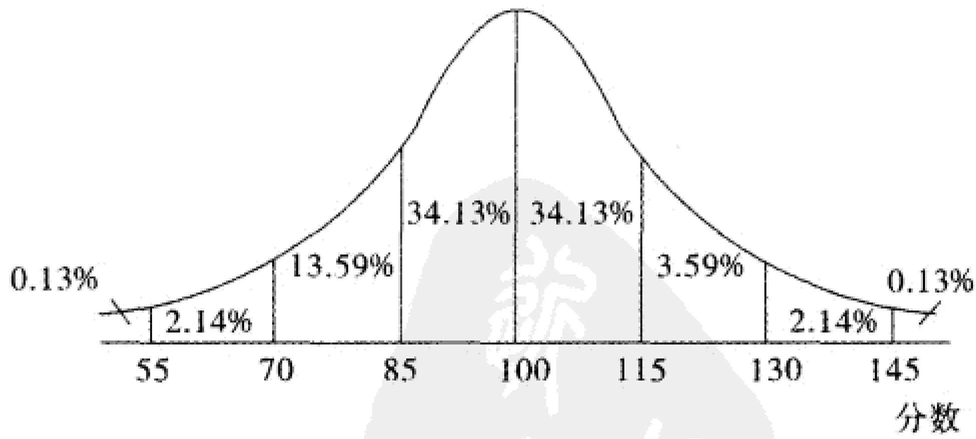


图 2-1-1　个人智商概率分布

智力的个体差异,即个人智商分数的构成成分的差异. 一般的智力测量都是由许多分测验构成的. 如韦克斯勒儿童智力量表

中有12个分测验,其中6个分测验是通过言语问答进行,被认为是测量言语智力.另外6个分测验是通过动手操作完成的,被认为是测量操作智力.研究表明,两个IQ分数相同的儿童,他们智商分数的构成可能有很大差异.譬如学生的总分相同.甲的数学为100,英语70,而乙英语为100,数学为70,尽管其总分相同,表现在数学或英语的状况都有差异.鉴于这两名学生在学习能力上将表现出明显差异.前一名学生适合学文化知识课程,另一名学生适合学习手工操作,有的学生适合学理,有的学生适合学文.

(2)智力的群体差异　社会中存在着不同的群体,如男人和女人、老人和年轻人(小孩)、种族与种族,不同群体之间的智力差异叫做智力群体差异.这里以男性和女性为例.皮连生教授认为:第一,男女智力能力总体水平大致相同,但男性智力分布的离散程度大,也就是说,很聪明和很愚笨的男性比女性多,智力中等的女性比男性多.第二,男女的智力结构存在差异,各自有自己的优势领域.比如,男性视知觉能力较强,特别是空间知觉能力优于女性,男性偏于抽象思维,喜欢数学、物理、化学学科.女性听觉能力较强,对声音辨别和定位优于男性,女性长于形象思维,喜欢历史、语文等学科.

(3)多元智力理论见证智力差异　美国哈佛大学的发展心理学家加德纳(H. Gardner)1983年在《智力的结构》一书中提出了多元智力理论.他将人的智力分为9种:言语—语言能力、逻辑—数理智力、视觉—空间关系智力能力、音乐—节奏能力、身体—运动能力、人际交往智力、自我反省智力、自然考察智力和存在智力等.他从新的角度分析了智力在个体上存在的方式,实质上也反映出了人在智力上存在差异.

三、性格差异

1. 性格的概念

性格(character)在现代心理学中,指个体在生活过程中形成的对现实的稳固的态度以及与之相适应的习惯化的行为方式. 首先,性格表现了人对现实的态度,并反映在他的行为方式中. 人对事物的评价、好恶和取舍等方面的态度不同,其行为方式也就会不同,从而构成人们的不同性格. 其次,性格是一个人独特的、稳定的态度和行为方式,那些一时性、情境性和偶然性的表现不属于性格. 再次,性格具有直接的社会意义,不同性格特征的社会价值是不一样的. 因而,性格便成为人与人相互区别的主要方面,是人格的核心. 对于性格,也有人视其为狭义的人格.

气质通常被看作与人的脾气有关的心理现象,它是依赖于身体素质,或与身体特点相联系的心理特征. 有人认为气质与先天生理和动力的禀赋有关. 性格和气质虽同属人格,但属于不同的概念. 可以从三方面理解气质概念:第一,气质是心理活动的动力特征. 不同气质导致心理活动发生的速度、强度和指向性不同. 第二,气质是一种天赋的人格特征. 20 世纪初俄国生理学家巴甫洛夫通过条件反射的研究发现人的高级神经活动类型不同,是人的气质不同的根源. 第三,气质是最稳定的人格特征. 同人的性格、动机、兴趣等相比,人的气质特征最不易改变. 这是因为气质在很大程度上是由遗传决定的.

2. 性格特征的差异

性格的个别差异表现在性格特征差异和性格类型差异两个方面.

(1)阿尔波特的研究　阿尔波特将性格特征分成共同特质与个人特质. 共同特质是在同一文化形态下的群体所具有的特质,它是在共同的生活方式下形成的,并普遍地存在于每一个人身

上. 共同特质又可以分为表现性特质和态度性特质. 表现性特质是在支配适应行动的动机系统中使行动具有一定的特征,包括支配性(顺从性)、扩张性(退循性)、坚持性(动摇性)等3个共同特质. 态度性特质是在对特定情境的顺应行为中所具有的对己、对人和对价值的态度,包括外倾性—内倾性、对自己的客观态度—自我欺骗、自信—自卑、对他人的合群性—孤独性等11个共同特征.

个人特质是个人所独有的、代表个人行为倾向的特质. 它包括主要特质、中心特质与次要特质. 那些几乎影响着个体全部行为的特质叫做主要特质,具有极大的渗透性和弥散性,在性格结构中处于支配的地位. 用来刻画个体特征性的倾向叫中心特质,少量彼此联系着的中心特质组成个体的独特性格,是个体行为的决定因素. 而对个体性格结构影响不大的特质属于次要特质,对行为的渗透性极小,如爱吃甜食之类的习惯与态度.

(2)卡特尔的研究　卡特尔将性格特征分为表面特质和根源特质. 表面特质是指从外观察到的成串的关联着的行为反应,它只能说明现象. 根源特质是决定外显行为的潜在变量,是人格的本质. 例如,大胆、独立和坚韧等性格特征可以直接表现出来,属于表面特质,而它们的共同根源特质则是自主性. 卡特尔发现有16种根源特质(表2-1-1),它们各自独立,相关极小.

表2-1-1 卡特尔的16种人格根源特质

人格因素	名　称	低分者特征	高分者特征
A	乐群性	缄默、孤独	乐群、外向
B	聪慧性	迟钝、知识面窄	聪慧、富有才能
C	稳定性	情绪激动	情绪稳定

续表 2-1-1

人格因素	名　称	低分者特征	高分者特征
E	恃强性	谦逊、顺从	支配、攻击
F	乐观性	严肃、审慎	轻松、兴奋
G	有恒性	权宜、敷衍	有恒、负责
H	敢为性	畏怯、退缩	冒险、敢为
I	敏感性	理智、着重实际	敏感、感性用事
L	怀疑性	信赖、随和	怀疑、刚愎
M	幻想性	现实、合乎成规	幻想、狂放不羁
N	世故性	坦白直率、天真	精明能干、世故
O	忧虑性	安详沉着、有自信心	忧虑抑郁、烦恼多端
Q_1	实验性	保守、服膺传统	自由、批评、激进
Q_2	独立性	依赖、随群附从	自立、当机立断
Q_3	自律性	矛盾冲突、不拘小节	知己知彼、自律严谨
Q_4	紧张性	心平气和	紧张困扰

(3)苏联的研究　苏联心理学家将性格分解为态度特征、意志特征、情绪特征和理智特征.性格的态度特征是个体对现实的态度体系的个别特点,属于处理各种社会关系方面的性格特征,如对社会、集体和他人的态度;对劳动、工作和学习的态度;对自己的态度等.性格的意志特征是个体对自己行为的自觉调节方式和水平方面的个人特点,包括行为的自觉性、可控性、坚持性和果断性等.性格的情绪特征是个体经常表现在情绪活动的强度、稳定性、持久性和主导心境方面的个人特点.而个体表现在感知、记忆、想像和思维等认知方面的个人特点则是性格的理智特征.

3. 性格的类型差异

性格类型是指在一类人身上所共有的性格特征的独特结合，许多心理学家都试图划分性格的类型，主要有：

(1)按心理机能分类　按性格中理智、情绪和意志各占优势的不同，把人的性格分为理智型、情绪型和意志型. 理智型的人，以理智来支配和控制自己的行为；情绪型的人，情绪体验强烈，行为易受情绪左右；意志型的人，目标明确，行为主动. 除这些典型的类型之外，还有些人属于中间型.

(2)按倾向性分类　依据个人心理活动倾向于外部，还是倾向于内部，把人的性格分为外倾型与内倾型两类. 前者心理活动倾向外部，对外界事物表现关心和感兴趣，心情开朗、活泼，善于交际. 后者心理活动倾向内部，对外界事物很少关心和感兴趣，反应迟缓，沉静、孤僻，适应困难. 不过极端外倾和内倾型的人只是少数，多数人处于内外倾之间.

(3)按独立与顺从程度分类　依据一个人独立或顺从的程度，把人的性格分为独立型和顺从型. 前者善于独立发现问题和解决问题，自主性强，不易受次要因素干扰，在紧急情况下能镇定自若，处事果断，喜欢表现自己的力量，也喜欢把自己的看法和意志强加于人. 后者独立性差，易受暗示，容易接受别人的意见，在紧急情况下往往心慌意乱，不知所措.

(4)一种两维的分类　英国心理学家艾森克(H. Eysenck)根据内倾—外倾和稳定—不稳定两个维度对人的性格加以分类. 稳定和不稳定属于情绪性维度. 镇静、顺应良好、可信赖等属于稳定的一端；而心情易变、焦虑、易激动等属于不稳定的一端.

4. 性格的性别差异

(1)性度的概念　性度是性别差异心理学的一个概念，指除男女生理上的差异外，根据性格、行为表现和能力的特征来确定男性和女性行为的程度，包括男性度和女性度. 从行为表现上看，

世界上没有绝对的男性和女性,男性度和女性度混合交织地存在于个体身上.由于有“度”的区分,性格就具有性别差异.

(2)性格性别差异的表现 1974年,美国的麦考比和杰克林(E. E. Maccoby & C. N. Jacklin)出版了《性别差异心理学》一书,通过对1 600项研究的分析和概括,阐述了是否存在性别差异、性别差异的程度以及性别差异的成因等理论.他们认为,最显著的性别差异是男性更具有攻击性.其次是女性比男性更好社会交往,更容易受暗示,自信心比男性差,更倾向于解决简单、墨守成规的问题,而男性则更倾向于解决复杂的、需摆脱定势的问题.对此,不少人另有看法.

§2 个体差异与数学学习

前面谈到个体的差异、认知差异、性格差异等,其中有些类型所表现出的特征,对数学的学习有着重要的影响.

一、认知差异与学习

认知差异对学习的影响不仅在程度上不同,而且起作用的方式也不同.

认知方式没有优劣好坏之分,只是表现为学生对信息加工方式的某种偏爱,主要影响学生的学习方式,具体表现在:

第一,学生对所用感觉通道的偏好.在数学学习方面,有的学生习惯于听觉学习,有的习惯于视觉学习,有的则更喜欢通过触摸或各种感觉的结合来学习.

第二,学生对学习环境的偏好.在数学学习中有的学生爱在宁静的环境中学习,有的则喜欢在有背景声音的环境中学习.

第三,对学习内容组织程度的偏好.在数学学习方面有的学生喜欢别人向他们提供结构严密的教学,有的学生则讨厌“菜单

式”的指导，爱自由自在地学习，较易适应结构不严密的教学.

第四，对学科选择的偏好. 有的学生倾向于选择数学，而有的学生则不然.

智力是影响学习的一个重要因素. 近一个世纪以来，人们一致认为，在传统教学条件下，智力是学习成绩的一个可靠的预测指标. 据统计，IQ 分数越高的儿童，一般学习成绩也就越好. 而且他们将来能接受的教育水平也越高. 学习成绩的测量与智力的测量两者的相关程度很高. 其相关系数在不同学习阶段要求是不同的，同时，智力对学习的影响与学科的性质有关，比如阅读、作文等成绩与智商的相关较高（中学阶段为0.6～0.7），数学和自然科学次之（为0.4～0.5），教学方法越是要求学生对信息作复杂的认知加工，则智力与学习总量的相关程度越高. 然而，智力并不影响学习能否发生，它主要影响学习的速度、数量、巩固程度和学习的迁移.

所以，教育工作者必须根据学生认知差异的特点，不断改革教学与教法，努力因材施教. 应该创设适应学生认知差异的教学组织形式. 自 16 世纪出现课堂教学以来，已习惯于将能力和知识水平不同的学生按年龄分班教学，即异质分组. 其优点是不同特点的学生之间可以互相学习、取长补短，其缺点是较难适应学生的认知差异. 于是，从 19 世纪末开始，有人提倡同质分组的教学形式，就是将能力或知识水平接近的学生组成教学班（组）. 我国不少学校流行的分快慢班，实质上就是同质分组. 它的优点是适应学生的个别差异，在一个班内缩小认知差距，便于用统一的进度和方法进行教学. 其弊端在于很难找到一种理想的分组标准，又会因给学生贴上了不同的标签，使好学生自满，使差生自卑和感到羞辱，不利于学生健康成长.

其次，采用适应于认知差异的教学方式，努力使教学方式个别化. 美国芝加哥大学的布卢姆（B. S. Bloom）通过长期的教学实

验，提出著名的掌握学习. 所谓掌握学习是指向不同能力水平的学生提供最佳的教学和给予足够的学习时间，从而使绝大多数学生达到掌握的程度. 在掌握学习程序中，布卢姆将学习任务分成许多小的教学目标，然后将教程分成一系列小的学习单元，后一个单元中的学习材料直接建立在前一个单元的基础上. 每个学习单元都包含一小组课，它们通常需要 1 ~ 10 h 的学习时间. 然后，教师编制一些简单的诊断性测验，在诊断的基础上调节内容与进度.

最后，运用适应认知差异的教学手段. 美国的斯金纳等人提倡程序教学，依靠教学机器或程序化教科书呈现学习程序，使学生循序渐进个别学习. 在现代，程序教学又发展为计算机辅助教学. 它是根据程序教学的原理将电子计算机技术运用于教学的一种手段. 数学的教学内容，通过文字、图片、幻灯片、电影片、录像带等载体，按程序编写成的材料置放在计算机的磁盘贮存器里，学生可利用电脑，按自己的学习基础和需要自定进度进行学习. 学生根据终端机屏幕上的提问，操纵键盘，作出回答，屏幕立即显示回答结果. 计算机能自动判断答案正确与否，并能将学生的学习过程、理解水平记录下来，及时反馈. 它能根据学生的反应，必要时再引进补习或补充教材. 计算机辅助教学突出的优点是：学生能根据自己已有的知识基础、接受能力、学习进度和学习方式选择指令程序，因人而异地自定目标进行学习. 能力强的学生可进行超前学习. 能力较差的学生，则可以放慢速度. 缺点是设备所需费用昂贵，难以普遍采用；同时也不适合于复杂技能和品德方面的教学.

二、性格差异与数学学习

性格不会决定学生的学习是否发生，但它却会影响学生的学习方式. 不同性格的人学习的方式不同. 如外向者对难度较大的

教材感兴趣，喜欢提问，但课后不爱认真复习，作业马虎.内向者课堂反应较慢，课后复习认真，遵守纪律.性格独立者爱参与竞争性学习.性格因素影响着学习的速度和质量，良好的态度、情绪和理智等性格特征有助于增强学生的学习信心，获得情感上的满足，提高对未来学习的志向水平，学习更加勤奋，因而有助于学业成功，而不良的性格特征则容易使学生产生消极、羞愧、恐惧、沮丧的情绪体验，产生退缩行为，导致学业失败.

为了促进学生的全面发展，数学教育应更重视情感因素的作用，使教育内容的选择和组织更好地考虑学生的性格差异.如教材的选用，教法的改进、数学情境的创设和老师的人文关怀，因材施教.例如，有的学校开设选修课、研究性课题，增添选学内容及阅读资料，都能较好地满足学生多方面的需求，适应学生的兴趣、爱好和能力倾向.美国心理学家罗杰斯(C. R. Rogers)提倡非指导性教学，强调以学生为中心，教师不是直接告诉学生应该怎样学习和解决他们所面临的问题，而是着重于创造促进经验学习的课堂气氛，以真诚的情感对待学生，给学生以无条件的关注，并能设身处地为学生着想，产生移情.随之而来的便是学生自我指向的学习.这样的非指导性教学显然有助于形成和谐融洽的师生关系，调动学生学习的自觉性和积极性.再如，在教学过程中，学生们以主动合作学习的方式代替教师主导教学设计的合作学习，不仅有助于培养学生主动求知的能力，而且有助于发展学生在合作过程中的人际沟通能力，养成集体感、友谊感等良好的人格特征.

三、特殊学生的数学学习

由于认知差异、个体差异，学校里会出现极度与众不同的学生，即特殊学生(如天才生和学困生)，这里特殊学生的数学学习不包括身体肢体的特殊学生.譬如史蒂芬·霍金身体有病，但数学学习成绩显著.

为满足特殊儿童的特殊学习需要而设计的教育属于特殊教育. 特殊教育与普通教育的主要区别在于更加注重儿童个体间和个体内的差异. 个体间的差异是能力分班或特殊分班的主要依据,特殊教育的各种设施,应以适应个别化教学为原则. 只有通过个别化教学,才能满足特殊儿童独特的需要.

(1)内容　特殊教育的内容必须满足各类特殊儿童的特殊需要. 应该向超常儿童提供普通学生不适用的高级课程,有助于他们接受高一级的教育,使天才有利于进一步发展. 而对弱智儿童来说,教学内容应该同他们的家庭、亲属以及街坊等相关的直接经验有联系,也可以考虑与职业安置有关的职业训练知识.

(2)技能　普通教育的目标集中在掌握某些公认的阅读和计算等技能上,特殊教育应让学生掌握一些特殊技能,这些技能对普通学生来说很可能不需要特别的教学就能掌握.

(3)环境　随着数学教学发展和需要,特殊教育的环境比内容和技能受到更多的关注. 关于特殊生的数学的教育目前有许多可以借鉴的方法:

1)普通班加巡回辅导　将特殊儿童置于普通班中,由巡回辅导人员定期或不定期向特殊儿童提供部分时间的教学,或对普通班教师进行咨询,商讨特殊儿童的辅导策略.

2)普通班加资源教室(resource room)　资源教室是为中小学特殊儿童设立的、与普通教室分开的补救教学场所,配有特殊的材料、设备和经过专门训练的教师. 它有两种用途,一是对学生作个别辅导或小组教学,通过补救学生所缺乏的技能或补偿其弱点来帮助学生克服学习中的问题. 二是由受过特殊训练的教师对那些普通教师难以处理的学生提供咨询与帮助.

3)特殊班　将教育需求相近的特殊儿童集中在一个班级内接受教育. 如有的学校设奥林匹克竞赛班和补课班,这种特殊班通常附设在普通中小学里,配备精干教师,制订切实可行的计划

和措施，特殊儿童的成长提供较适宜的环境和条件，使其尽力发展.

4)创造和提供一些更好、更有利于特殊生学习的必要条件和环境，当然对于一些天才学生，他们会克服一切困难进行学习的，譬如资料、书籍、学习用具. 生活困难的还要给以适当补助.

参考文献

1. 王申怀. 编写新教材中的一些感想. 数学通报，2004(7)

2. 关成志主编. 数学思维概论. 沈阳：辽宁教育出版社，1993

3. [美]鲍尔，E · R 希尔加德. 学习论. 邵瑞珍，皮连生译. 上海：上海教育出版社，1987

4. 皮连生. 学与教的心理学. 上海：华东师范大学出版社，2003

5. 朱文芳. 将心理学应用于数学教育实践要注意的问题. 数学通报，2005(6)

6. 张奠宙，宋乃庆主编. 数学教育概论. 北京：高等教育出版社，2004

7. 林夏水. 数学哲学. 北京：商务印书馆，2003

8. 张顺燕. 数学的源与流. 北京：高等教育出版社，2003

9. 郑錬. 当代数学的若干理论与方法. 上海：华东理工大学出版社，2003

10. 解恩泽，徐本顺. 数学思想方法. 济南：山东教育出版社，1989

第二章　数学的认知学习

学习，是人生进步和发展的重要途径，是贯穿个体一生的重要活动. 今天，“学习论”已成为心理学的一个重要组成部分. 作为对数学学习的研究，学习自然是一个核心问题. 本章主要介绍学习的定义，探讨不同阶段数学学习的心理规律.

§1　学习的概念

一、学习的定义

学习和记忆是现代心理学的一个分支，这两个概念既简单又复杂. 所谓简单，是因为人们都有自己对“学习”的理解，也可从字典上找到“学习”的词义. 所谓复杂，是因为学习和记忆研究有其哲学根源：一是知识的分析（怎么知道事物的），涉及哲学家的认识论；二是精神生活的性质与组织的分析，涉及学习论的概念、思想、意象、辨别、回忆和想像的性质和内容.

关于认识论，在哲学里有不同的观点和理论. 在认识论中最引人关注的问题是概念和知识是怎样产生的，以及经验与心理组织有什么关系. 在这个问题上，有两个对立的观点：经验主义和理性主义.

经验主义的观点是:经验是知识的惟一源泉.经验主义虽然不否认知识可以从各种经验之间的理性思考中推衍出来,但特别重视感觉.经验主义具有下述的特征:感觉主义、还原主义、联想主义、机械主义等.经验主义含有两个基本的学习机制:①简单观念的内在表象.②复杂观念则是将邻近得到的简单观念联合在一起而形成的,它们通过联想接合起来.经验主义还将"思考"纳入他们所关注的理论中,据此从记忆中唤起若干观念,加以比较,得出结论,引起其他联想.

理性主义的一般哲学观点是:理性是知识的最初来源.知识、信仰和行动的惟一可靠基础,不是感性资料而是理性资料,即典籍、神灵的启示或直觉.理性主义为了与经验主义抗争,笛卡儿、莱布尼茨、康德等人在他们著作中多处与经验主义对立,两者对"感觉材料"在构造现实的作用上有着不同看法:经验主义者看来,人们的观念是感觉材料的复本;理性主义看来,感觉资料犹如一团无结构的未分解的乱麻,只能给一种解释机制提供原始资料.对于"知觉的组织",理性主义认为,经验主义的知觉理论对于知觉的整体性以及关系在知觉统一性中所起的作用方面,提出了不恰当的说明.对于"心理的组织",理性主义对联想主义的攻击取得了一些成功.理性主义的例子是语言问题:具有特殊的说服力.康德说:"尽管我们的一切知识开始于经验,但不能认为知识完全来源于经验."

另外,行为主义心理学家认为学习是"由经验引起的行为相对持久的变化".强调学习的本质是行为的变化,即学习活动发生后,学习者要有可观察、可测量的外在变化.认知心理学家则认为:学习是人的倾向或能力的变化,但这种变化要能保持一定时期,且不能单纯归因于生长过程.根据这一定义,学习的实质不是外在行为的变化,而是内在能力或倾向的变化.但是内在变化难以直接观察,必须依据外部行为变化来推测.内在变化和外显行

为有时是一致的，有时则不完全一致.

经验主义心理学在 19 世纪联想理论基础上，又吸收了心的主动性的思想，指出人的两种动作：一种没有任何刺激而发生的动作叫自发动作；另一种是由意志情绪引发的动作叫意志动作.人的自发动作可发展为意志动作.

行为心理学家认为学习是由“经验引起的行为相对持久的变化”.可见，各种学习理论是存在分歧的.但根据学习的特征，鲍尔和希尔加德为学习下了暂时的定义：学习是指一个主体在某个规定情境中的重复经验引起的，是对那个情境的行为或行为的潜能变化.不过这种行动的变化是不能根据主体的先天反应倾向成熟或暂时状态（为疲劳、醉酒、内驱力等）来解释的.

关于“学习”的概念与比较心理学的“先天的反应倾向”，与成熟、作业习惯化等都是有区别的.

学习是一个广阔的、不严格的概念、思想，要提供一个包括一切的学习形式是很不容易的.所谓的分歧，不在学习定义的本身，而在不同解释的争论.第一种分歧，经验主义的主要论点在于学习的观点是通过事件或观念的接近联想而产生的，但格式塔心理学家、信息加工理论学家、认知心理学家却反对.第二种分歧，一直在联想主义内部争论，就是刺激—反应理论和认知理论之间的冲突.

二、加涅的学习结果分类

记忆的问题在现代心理学中占重要的地位，阿特金森和希夫林认为记忆结构是固定的，而控制过程是可变的，提出了记忆信息加工模型，如图 2 -2 -1，从图可以看出外界信息通过感觉器官进入感觉记忆，最后到长时记忆.这个过程是一个复杂的过程和加工系统.

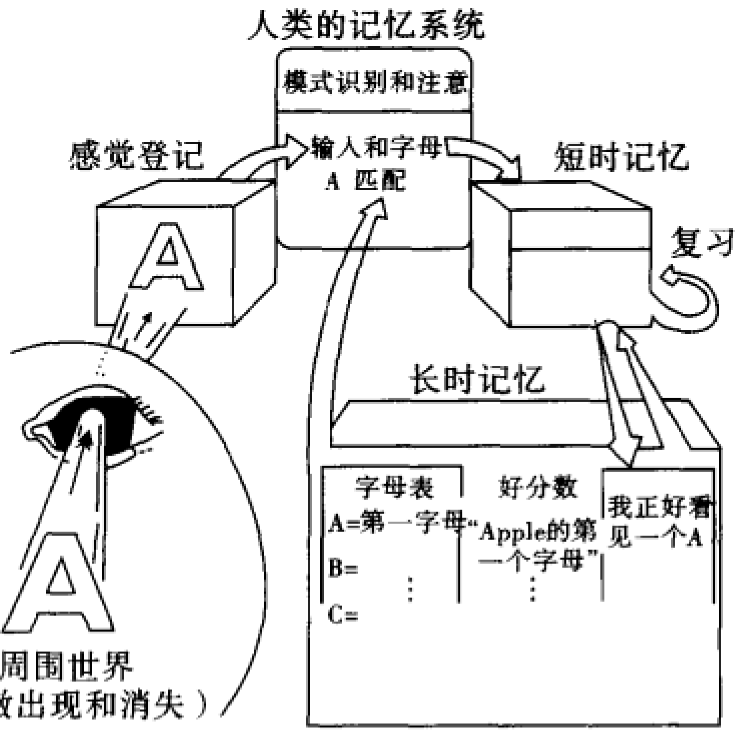


图 2－2－1

学习现象是极其复杂的，学习的类型也多种多样，可以按过程或结果分类，也可以按复杂程度分类．这里我们主要介绍加涅的学习结果分类．美国教育心理学家加涅长期致力于人类学习与教学的研究，提出了著名的学习结果分类理论，加涅的学习结果分类包括认知、动作技能和态度三方面：

认知包括：言语信息、智慧技能和认知策略．①言语信息：加涅所指的既是知识也是能力．这里的知识是回答世界"是什么"的知识，它对学生的能力要求主要是记忆．②智慧技能：加涅指的是运用符号办事的能力．这里的知识是回答"怎么办"的知识，它对学生能力的要求主要是理解和运用概念和规则的能力，进行逻辑推理的能力．其内部又分为基本学习形式、联想与连锁、辨别、概

念、规则、高级规则等，具有由简单到复杂构成一个层级关系. 这里的联想与连锁是刺激与反应之间的一系列联系的形成，也可以说是条件反射学习，在联想和连锁基础上形成最低级的智慧技能辨别(辨别指发现事物或符号间的差别). 继而在辨别基础上逐级形成概念、规则和高级规则. ③认知策略：加涅指的是个体对认知过程进行调节与控制的能力，包括学习者控制自己的注意力、选择性知觉、调节编码方式、提高记忆质量等能力，它是学生学会如何学习的核心成分. 与智慧技能不同，它是一种对内调控的能力，而智慧技能是一种对外办事的能力.

三、学习过程

前面介绍的学习定义是从学习结果来揭示学习本质的，然而任何结果都是过程的产物，只有剖析学习的过程，才能真正理解和把握学习的实质. 从哲学到教育学，从心理学中的行为主义理论到20世纪的信息加工理论，都从不同角度或不同侧面对学习过程作过描述. 然而，在多种描述中惟有现代信息加工理论对学习过程的描述，对数学教学活动富有指导意义. 下面我们将分别介绍加涅和梅耶(R. C. M. ayer)两种学习过程模型.

1. 加涅的学习记忆模型

加涅认为，学习是一系列认知过程，这些过程把来自环境的刺激转化为获得一种新能力所需的信息加工的几个阶段，也就是说，学习是学习者通过自己对来自环境刺激的信息进行内在的认知加工而获得能力的过程. 他提出了一个较为完整和系统的学习与记忆的信息加工模型，以便形象地反映学习与记忆的内在过程见图2－2－2 加涅的学习与记忆的信息加工模型.

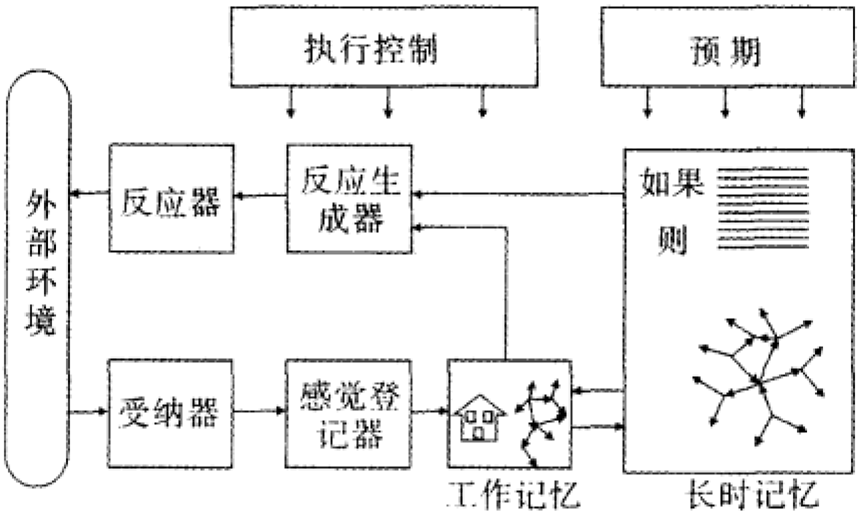


图 2-2-2

从以上模型可以看出,学习是以下三系统协同活动的过程:

(1)加工系统　又称操作系统,从阿特金森和希夫林记忆信息加工模型图2-2-1和加涅学习、记忆的内在过程图2-2-2知,它由受纳器、感觉登记器、工作记忆(短时记忆)、长时记忆、反应发生器、反应器构成.来自环境的刺激作用于受纳器,受纳器将接收到的信息传递至感觉登记器.因为信息在此处只保存1秒左右或者只有几分之一秒,在这一阶段,绝大多数信息未能受到注意,只有一小部分信息被注意选择而进入短时记忆加工阶段.信息进入短时记忆便被编码和贮存.但短时记忆对信息的贮存时间很短,一般只有30秒左右,而且容量极为有限,只有7加或减两个信息单位(这个数量又称记忆广度).如果学习者能进行复述,信息就能保持较长时间,即进入下一个加工阶段——长时记忆加工阶段,否则就被遗忘.短时记忆又叫"工作记忆",这两个术语分别强调同一概念的不同方面.短时记忆强调信息停留的时间,工作记忆强调其功能.与短时记忆相比,长时记忆对信息保留的时

间更长，且贮存容量更大．存贮在长时记忆中的信息如果要用，必须通过“提取”，提取的信息构成“反应发生”的基础．如在数学与学习中对正学过的知识公式方法．有意识的认知活动而言，信息从长时记忆流向短时记忆，然后到达“反应发生器”，而对于熟练的自动化反应而言，信息可以直接从长时记忆流向反应发生器．反应发生器对反应序列进行组织并指引反应器．反应包括人的所有肌肉活动和腺体分泌．对学校学习活动来说，主要的反应器是书写中的手臂及发音器官．

（2）执行控制系统　在图 2－2－2 中，这一系统的箭头不与任何一个操作成分直接相连，意味着它对整个加工系统进行调节和控制．学习者的头脑好比一个加工厂，它的生产活动，需要有专业部门和专业人员进行监督、协调和控制，以提高生产效率和产品质量．学习活动作为一个信息加工过程需要自我调节和控制．比如，数学学习中概念的认识和使用，通过对感觉系统的调节，可以使之选择适当的信息加以注意，对记忆的编码方式进行调节，可以提高信息的贮存质量等．这种对信息加工过程的内在调节控制能力，在加涅学习结果的分类系统中称为“认知策略”，从知识分类的角度看，属于程序性知识．

（3）期望　期望属信息加工过程的动机系统，它不包括在完整的信息加工过程中，但对加工过程起定向作用．任何学习活动都是指向一定目标的活动，如读数学教科书和看到一个问题的求解过程，弄清每一部分的意义等．这些目标有时是教师、学校确定的，或是学生自己设定的，它影响着学习者努力的程度和注意力集中的水平．如果学习者对达到预定目标有强烈愿望，他就能集中注意力，专心学习，选择有效的学习和记忆策略．学习目标的实现会令学习者感到满足、愉快，从而增强了学习信心，更加努力地投入到下一阶段学习活动．

2. 梅耶的学习过程模型

美国教育心理学家梅耶在加涅的学习信息加工模型基础上进行简化，于 1987 年提出一个极为简约的学习过程模型见图2－2－3.

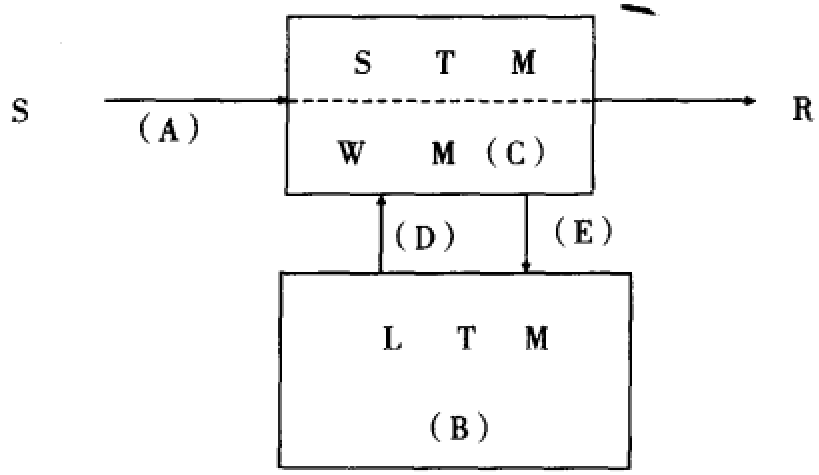


图2－2－3

(A)注意　(B)原有知识　(C)新知识的内部联系
(D)原有知识与新知识的联系　(E)新知识进入长时记忆

以上模型显示，学习活动始于学习者的注意(A)，通过注意，学习者选择了与当前学习任务有关的信息材料，并将有限的心理能量集中在相应的数学问题的解决上，同时激活新信息有关的贮存在长时记忆中的原有知识(B). 新信息进入工作记忆系统(WM，又叫短时记忆 STM)，学习者找出新信息各部分的内在联系(C)，与此同时，与新信息有关的处于激活状态的原有知识概念、公式、方法和新信息产生联系(D). 最后，新知识再进入长时记忆中贮存起来(E).

如果将梅耶的学习模型进一步简化，你会发现它事实上是“S－O－R”简式. 只是梅耶将认知过程“O”假设为注意、短时记

忆、长时记忆的加工活动.新信息被学习者注意后,便进入短时记忆系统,被激活的原有知识也进入短时记忆系统,新旧知识相互作用.在学习过程中强调新旧知识的相互联系,是梅耶学习模型的最大特点,这些对于数学学习是非常有意义的.

3. **有效学习的条件**

从加涅和梅耶对学习过程的理论假设中,我们可以归纳出有效学习的一般条件:

(1)内部条件

1)学习者应当具有适当的知识准备,贮存于长时记忆中的原有知识和技能是新的学习产生的重要内部条件.美国著名的教育心理学家奥苏泊尔(D. P. Ausubel)在他1978年出版的《教育心理学:认知观》一书的扉页上写道:"假如让我把全部教育心理学仅仅归纳为一条原理的话,那么,我将一言以蔽之:影响学习的惟一最重要的因素就是学生已经知道了什么,要探明这一点,并应据此进行教学."关于原有知识对当前学习活动的影响,先哲们早就有所领悟,我国古代就有"以其所知,喻其不知,使其知之"的精辟论述.由于认知心理学的发展,人们对学习过程的心理机制的了解日趋深入,将原有知识作为学习的重要内部条件提出.许多实验研究显示,学习实际上是新旧知识相互作用的过程.关于学习在新旧知识相互作用方面,梅耶的学习过程模型已充分强调和解释了这一点.加涅的学习模型中,也十分关注长时记忆.

2)学习者应当具有主动学习的心理倾向.如果学习者头脑中有了适当的知识准备,而没有学习的愿望或积极性,新的学习仍然不能发生,笔者曾对一些学生"一学就会,但就是不学"现象作了一些研究,发现这种现象归结为动机问题.这种学习者的主动加工倾向,在加涅的信息加工模型中被描述为"执行控制"和"期望"两个系统.在梅耶的模型中,表现为对学习者的"注意"和"发现新知识的内部联系"并积极将"新旧知识联系"起来的愿望.

(2)外部条件　学生的学习作为一种结果是学习者的内部条件和外部条件相互作用的产物. 外部条件的含义极为广泛,大至社会、学校、家庭,小至班级、课堂. 就学校教学而言,与学生的学习活动关系最紧密的外部条件是教师,这里主要包括教师对教材的组织与呈现、教学方法的选择和运用、教师的知识水平和人格特征等等.

§2　知识学习的分类与阶段

1. 广义的知识及分类

前面已经说到,认知心理学把人的认知过程假设为信息加工过程,信息加工的结果就是获得按一定方式贮存的信息,即获得知识. 根据现代认知心理学,我们把知识定义为:个体通过与其环境相互作用后获得的信息及组织. 贮存于个体内的是个体的知识;贮存于个体之外的,即为人类的知识.

现代认知心理学把个体的知识分为两类,一类为陈述性知识,另一类为程序性知识. 陈述性知识是个人具有有意识的提取线索,因而能直接陈述的知识. 知识主要用来回答世界是什么的问题. 比如"三角形有三条边和三个角"、"平行四边形的两组对边平行"等等. 这类知识一般通过记忆获得,可以称为记忆性知识或语义知识,与加涅分类中的"言语信息"相一致. 程序性知识是个人没有有意识的提取线索,只能借助某种作业形式间接推测其存在的知识,它主要用来解决怎么办的问题. 比如,学生利用三角形的概念去识别几何图形中的三角形;学生按照异分母分数相加法则求出$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=?$等. 程序性知识是一套办事的操作步骤,在本质上,它们由概念和规则构成. 比如,学生解决$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=?$问题

的过程，实质上是运用通分、求最小公分母等规则解决问题的过程. 由于运用概念和规则办事的指向性不同，使得程序性知识表现为两类：一类是为运用概念和规则对外办事的程序性知识；另一类为运用概念和规则对内调控的程序性知识. 按加涅学习分类方法，前一类被称为智慧技能，后一类被称为认知策略. 那么智慧技能和认知策略的根本区别一个是加工外在的信息，一个是来调节、控制自己的加工活动.

由此可见，知识概念有广义和狭义两种，狭义的知识概念仅指陈述性知识；广义的知识概念包含三类知识，即陈述性知识、对外办事的程序性知识和对内调控的程序性知识.

学校教育既要传授知识，也要形成技能. 这里所说的"知识"，实际是指狭义的知识，即陈述性知识. 这里所说的"技能"，从广义的知识观来看，实际上是个人习得的一套程序性知识并按这套程序去办事的能力，譬如数学的态度和精神，数学思想方法. 认知技能包含智慧技能和认知策略两类.

以上所说的广义知识、狭义知识、技能和策略等概念间的关系，可以用图 2－2－4 广义的知识分类表示：

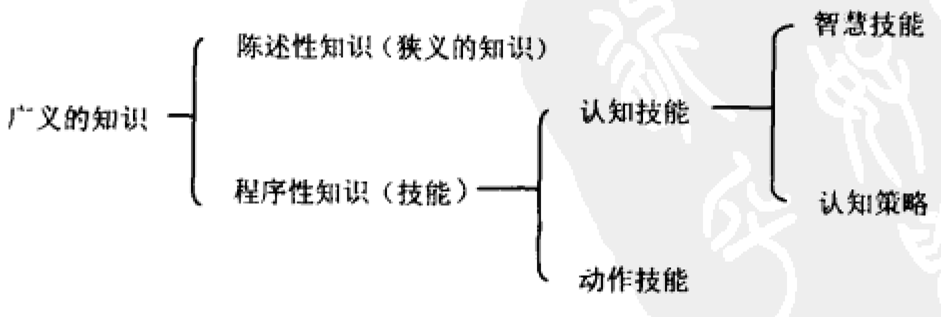


图 2－2－4

2. **广义知识学习阶段**

加涅和梅耶都对学习过程提出了自己的解释，尽管所用术语不同，强调的方面也不尽相同，但都意识到学习的过程始于注意，

由此,新信息经过短时记忆,进入长时记忆并贮存下来.在一定条件下,长时记忆里的信息被提取、被应用,这是学习的一般心理过程.结合课堂教学实践和有关实验研究,我们认为广义知识的学习包括习得、巩固和转化、迁移和应用三个阶段,如图2-2-5所示的广义知识学习阶段与分类模型.

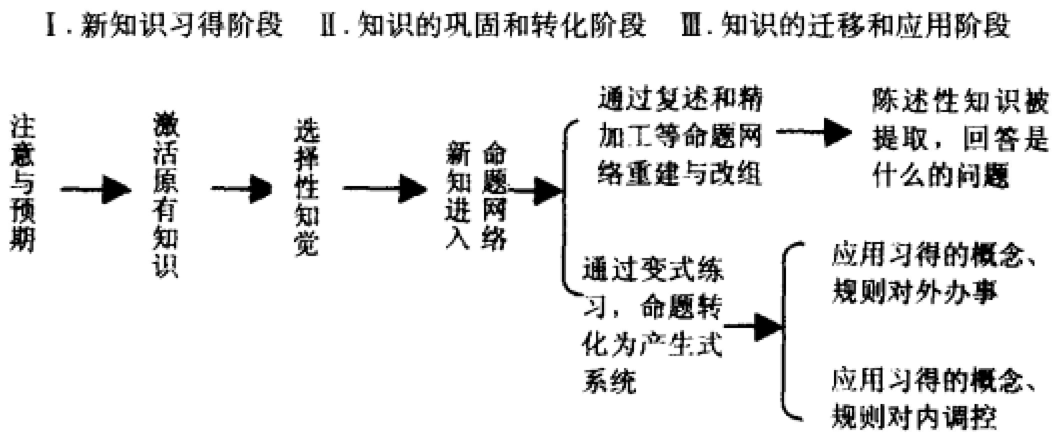


图2-2-5

(1)新知识习得阶段　广义知识的学习始于学习者的注意和预期.由于对学习目标的期望,学习者处于一定的激起状态,与预期要获得的新知识有关的原有知识被激活进入工作记忆中,随时准备吸收新知识.在学习目标的指导下,学习者有选择地接受新的信息,并将它暂时贮存于短时记忆中.新旧知识相互间产生联系,并与处于激活状态的原有知识相互作用.最后,新知识以一定的方式与原有知识形成联系,这就意味着新知识已进入原有的命题网络.在学习的第一阶段,所有知识都是陈述性的,对程序性知识来说,习得的是它的前身,即程序性知识的陈述性形式.比如:"平行四边形"与"两组对边平行的四边形"联系起来,学生不仅认识了"平行四边形",还能向别人转述这一内容,这意味着对"平行四边形"的学习仍处于陈述性阶段.

(2)新知识的转化和巩固阶段　在这一阶段,新知识有两种发展方向,一部分知识继续贮存于命题网络中,通过适当的复习,这部分知识得到巩固,同时原有命题网络得到改组或重建.另一部分知识经过各种变式练习,转化为以产生式系统表征和贮存的程序性知识.这两部分知识以不同的表征方式贮存于长时记忆中,以备日后提取使用,比如由四边形→平行四边形→矩形、菱形→正方形的知识链.

(3)知识的迁移和应用阶段　在知识的应用阶段,不同类型的知识被用来解决不同的问题.陈述性知识被提取出来,用来解决"是什么"一类的问题,如"椭圆及其标准方程是什么".一部分程序性知识被提取出来用来对外解决"怎么办"的问题,另一部分程序性知识被提取出来,用来对内解决"怎么办"的问题.陈述性知识的提取是一个有意识的依据线索的提取过程,对外办事的程序性知识的提取往往是一个快速、自动化的激活过程.

上述知识学习的三个阶段是学习者的内部活动过程,它需要外在教学手段的诱发.在学习的第一阶段,两类知识尚未分化,是新材料习得意义阶段,教学设计的关键是吸引学生的注意,激活学生的原有知识.在知识学习的第二阶段,陈述性知识要完成的目的是进一步巩固新的意义并使之与原有知识进一步分化.这时教师应指导学生复习,教给学生有效复习和记忆策略.而对程序性知识来说,这一阶段要完成由陈述性知识向办事技能转变的任务.因此,教师应精心设计多种变式练习,促使学生练习,并及时对经常习得结果提供反馈和纠正.在知识学习的第三阶段,对学习者而言,是知识的迁移和运用,对教学过程而言,是进行学习结果的测量和评价.由于陈述性知识解决"是什么"的问题,程序性知识解决"怎么办"的问题,教师应当针对不同类型的知识,采用不同的行为指标,设计不同的问题情境,才能获得真实可信的评价结果.

§3 新知识的认知学习

知识学习的第一步是要获取信息，而获取信息的内部条件是学习者有明确的学习目标，能集中注意于学习内容．很难设想一个漫不经心，注意力涣散的学生能有效获取与当前学习任务有关的信息．因此，要弄清获取信息的心理规律，就要探讨注意、预期和选择性知觉．预期是学习者指向目标的活动状态，属于学习动机，后面专门讨论动机问题．本节主要讨论注意和知觉．

一、注意

1．注意的定义和类型

注意这一概念像心理学中的许多概念一样，持不同观点的心理学家有不同的定义，如美国的一本有影响的心理学教科书《心理学导论》(1983 年第 8 版)把注意定义为“导致局部刺激的意识水平提高的知觉集中”．有两层含义，其一，注意指“知觉的集中”；其二，知觉集中的结果导致人对局部刺激水平的意识提高．这也意味着对知觉集中范围外的刺激意识水平下降或者根本无意识．也有人把注意定义为“心理活动对一定对象的有选择的集中”等．

在学习的信息加工过程中，感觉登记器的主要任务是将外界刺激引起的生理感觉转化为心理知觉，信息在此处几乎不被筛选．然而人的心智能源有限，不可能对受到感觉登记的信息作全面反应，只能选择其中一部分信息，由知觉对其整合、组织，并识别出它的意义．注意就像一台信息过滤器，它让一部分信息进入意识层，将许多信息阻挡在意识之外，以便于人们有足够精力对重要信息进行加工．譬如椭圆定义的教学：

取一条一定长的细绳，把它的两端固定在画板上的 F_1、F_2 两点，见图 2－2－6，当绳大于 $|F_1F_2|$ 长度时，铅笔尖拉紧绳子，使笔

尖在图板上移动，可以画出一个椭圆，在作图过程中让学生注意：①“定长”的细绳；②“细绳长”大于$|F_1F_2|$；③“拉紧绳子”；④笔点移动；⑤笔点在“图板”上；由注意达到对椭圆定义的直观理解.

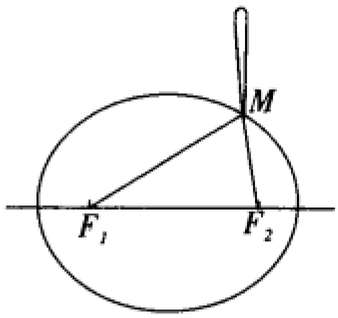


图2－2－6

人们在集中注意时，会将相应的感觉器官关注注意的对象，以利于信息的接收. 有经验的教师往往能根据外在状态判断学生是否集中注意听课. 注意的反面是分心，分心不是无注意，而是知觉没有指向与当前任务有关的内容. 如老师在讲课，学生在偷看小说. 对教学任务而言，学生的行为是分心，对看小说来说，学生是注意力高度集中的.

注意有两类，一类叫无意注意，是没预定的目的、不需要作意志努力就能达到的注意. 比如，学生正专心听课，一个偶发事件引起学生的注意：学生对偶发事件是不由自主产生的. 另一类叫有意注意，是预先有一定的目的，并需要一定意志努力才能达到的注意. 由于“有意注意”和“无意注意”在研究中难以严格划分，为了避免混淆，西方学者提出了偶然学习和有意学习两个概念.

偶然学习(incidental learning)指在规定学习任务之外的信息的获得. 有意学习(intentional learning)指与规定任务有关的信息的获得. 例如：某一位老师在讲解一个难题时，在黑板上，一边分析和讲解，一边板书，最后学生弄通了这个题. 但学生还记住了这道难题之外老师的一些特点，如老师衣着整齐，板书工整、清晰、漂亮，语言表达简洁明了，成了学生模仿的模范，便出现了偶然学习.

2. 注意的基本特征

注意有三个基本特征，即注意的广度、注意的稳定性和注意的分配.

(1)注意的广度　也叫注意的范围,指一个人在同一时间内能清楚把握的客体的数量.研究表明,在0.1秒内,成年人一般能认清8~9个黑色圆点,注意到4~6个没有联系的外文字母,3~4个几何图形,能看清3~4个没有联系的汉字.对内容有联系已组成词或句子的文字,一般可看到5~6个.注意广度可以随人的学习经验的丰富而扩大.初学者,注意范围小,速度慢,熟练后,注意广度增加,速度加快.

(2)注意的稳定性　注意的稳定性的狭义含义是指注意维持在同一对象上的时间.其广义的含义是随着活动内容的变化,知觉指向相应内容上的时间.比如对方程或不等式 $x^2-x-2=0$, $x^2-x-2<0$, $x^2-x-2>0$ 的教学,学生注意到:"等式的解"是"$y=x^2-x-2$"的图像与 x 轴的交点;"$x^2-x-2>0$ 的解"是"$y=x^2-x-2$"图像在 x 轴上方图形对应的 x 值;"$x^2-x-2<0$ 的解"是"$y=x^2-x-2$"在 x 轴下方图像对应的 x 值,注意到"数与形"关系,并将这种注意运用到其他问题上.

(3)注意的分配　是指在同一时间内将注意力分配给两种或两种以上的活动,如学生一边听课,一边做笔记.注意分配的重要条件是同时进行着的活动中,有些活动应相当熟悉或达到自动化.许多熟练动作可以不必用意识控制,能自动进行,使注意分配能力大为提高.如大学生的书写达到自动化程序,所以边听课,边记笔记.

3.影响学生注意的因素

无意注意和有意注意的性质不同,影响它们的因素也不同.一般而言,前者更易受刺激物外在特征的影响,后者更多受学习者自身特征的影响.应当指出:我们了解这些影响元素注意的因素,是为了使其成为有利于学习的因素.

(1)影响无意注意的因素　学生的无意注意受刺激物的物理特征、情绪特征、差异特征、指令性特征四个因素的影响.

1)刺激物的物理特征　刺激物强度、大小、颜色、音量的变化是能引起注意的物理特征. 教师讲课时提高或降低声音,教科书或板书字体、颜色的变化可以唤起学生的注意.

2)刺激物的情绪特征　有些刺激物的强度并不强,但能唤起人们的情绪反应或使人兴奋,或使人紧张恐惧.

3)刺激的差异特征　某些刺激偏离它们的周围环境或偏离人的预期效果,使人产生新颖感、复杂感、惊奇感或独特感,由此唤起人们的注意.

教材内容和题材的变化可以使学生有新颖感. 有些内容如经过大量重复,学生可能产生厌烦感. 这时可以改变教学方法,以提高学生的新颖感. 增加复杂性也可以引起学生的注意. 有时模糊的问题,也可以引起学生的注意,如:

$x>0$ 时,$y = x+\frac{1}{x}$的最小值是2;

$x<0$ 时,$y = x+\frac{1}{x}$的最小值是2,正确吗?

$x\geqslant 2$ 时,$y = x+\frac{1}{x}$的最小值是2,正确吗? 引起学生讨论.

总之,教师适当运用刺激的这些特征,可以唤起学生的注意.

4)刺激的指令性特征　有些文字、话语因具有指令性,即使刺激的物理强度不强,也很能吸引人的注意. 教师常用"请仔细听"、"这一点很重要"、"请注意看这边"、"做到这里一定要当心"、"这里给我们的启示是什么"等指令性语言来控制和引导学生的注意.

当然,无意注意有时也受学习者的预期、原有知识经验、需要和兴趣等内部特征的影响.

(2)影响有意注意的因素　学习者对学习活动的间接兴趣、智力活动的积极性以及生理和情绪状态是影响有意注意的三个

重要因素.

1)间接兴趣　兴趣是个体积极探究某些事物或进行某些活动的倾向. 著名心理学家鲍尔和希尔加德(G. H. Bower & E. R. Hilgard)在《学习论——学习活动的规律探索》指出:“兴趣是一个含有许多因素的非分析的术语,但通常它是指材料的强化性质(例如卡通片和连环画小册子对儿童起奖励作用);或是指学生认识到学习教材对于达到不同于考试分数的,或某种可清楚认识到的目标来说,有其明确的工具性价值.”他们所说的兴趣的第一层含义是我们平时所说的直接兴趣. 他们所说的兴趣的第二层含义,也就是我们平时所说的间接兴趣.

如果说,无意注意主要依赖于人的直接兴趣,那么,有意注意主要依赖于人的间接兴趣. 教师要培养与引导学生的有意注意,关键是培养学生的间接兴趣. 而间接兴趣是不可能通过简单说教就能培养起来的. 例如,学好数学,在解决生活和工农业生产中的实际问题中的作用,使学生看到数学的价值. 从而达到有意注意的培养.

2)智力活动的积极性　学习者智力活动的积极性越高,越能保持有意注意. 例如,有些家境贫困的学生,学习条件极差,但由于学习动机强烈,总是能排除各种干扰,潜心攻读.

3)生理和情绪状态　学习者的心理和情绪状态不佳也会干扰注意力的集中. 疾病、睡眠不足、生活中的负性事件导致的情绪低落、萎靡不振,都会使学习者无法专注于学习. 因此,保持良好的身心状态也是学习者不可忽视的方面. 关于“注意”规律的具体应用,在课堂教学中教师的“引趣提问”、“设置教学情境”等都是为了激发学生兴趣,引导注意力的集中. 对于学习者本人,既然知道注意力集中是学好数学的前提,就必须不断明确学习目的,排除环境干扰,强制自己集中注意力. 学习活动的目的、任务明确,会产生稳定的间接兴趣,即一个人对某种事物可能导致的预想结

果的兴趣.有的学生本来对数学课无多大兴趣,但当他认识到数学是学习自然科学和社会科学的基础,对今后所学的专业有十分重要的意义时,就会帮助他们加大对数学学习的注意,并积极努力地去学习.

二、选择性知觉

1. 知觉的定义和类型

知觉是将感觉器官获得的信息转化为有组织和有意义的整体的过程.知觉不是简单地将感官接收的信息拼接相加,而是依据已有的经验对输入的刺激加以识别和理解.

著名知觉心理学家吉布森(J. J. Gibson)认为,对人类生活和学习起重大作用的是五大知觉系统:基本定向系统、听觉系统、触觉系统、味—嗅觉系统和视觉系统.它们分别从体内外环境中获取不同的信息,产生不同的知觉.对于数学学习,其中视听觉系统摄取的信息量最大,也最为重要.获取知识时,学生应尽可能发挥多种知觉系统的作用,多方面收集信息.收集的信息越多,越可能真实全面地把握知识.因此,教学过程中,老师应尽可能多地创设情境,让学生去看、去听、去说、去做,由此让学生去感受和领悟.

2. 知觉的基本特征

(1)知觉的组织性　知觉的组织性指人脑将输入的刺激组成有意义的整体.知觉组织的最重要的规律是区分图形与背景.图形是高度有结构的、被人认作注意对象的知觉领域部分.与图形相对照,背景总是模糊的,细节未分化的.观察可以清晰地演示图形与背景的区分.例如,图2－2－7的两可图(又称两关图),我们可以把它看成白色背景上的高脚杯,也可以看成被



图2－2－7

黑色背景分开的两个人头部侧面像. 又如 $x_0\cos\alpha^3 x + y_0\cos\alpha = a$. 既可看作$(x_0, y_0)$是方程:$x\cos^3\alpha + y\cos\alpha = a$ 的点. 又可看作:$\cos\alpha$ 是 $x_0t^3 + y_0t = a$ 的根. 这反映我们对同一视觉对象可以进行不同组织. 只有被作为知觉对象的客体,才是学习的对象,才可能在记忆中保持. 同时,也有利于问题的解决.

(2)知觉的整体性　知觉的整体性指在知觉过程中,部分会丧失它们以前的特征,呈现出由整个模式决定的新特征.

知觉的整体性在现代认知心理学理论中被称为自上而下的加工方式,即在识别特殊部分之前,对完整模式的各个方面已有了某种意义的假设,这种假设限制对局部信息的解释. 如 $a^2 - c^2 = b^2$是椭圆里 a、b、c 的关系. $c^2 - a^2 = b^2$ 是双曲线里 a、b、c 的关系.

(3)知觉的恒常性　当知觉的条件在一定范围内发生改变时,知觉结果依然保持不变,这就是知觉的恒常性. 在各种知觉中,视觉的恒常性表现得最为突出,主要有颜色明度恒常、形状大小恒常等. 例如:一只碗、一扇门,从一种角度看,碗总被看成圆的,门总被看成是长方形的,而实际在我们的眼中呈现的图形形状并不都是圆形和长方形的,这是形状恒常的例子. 类似这样恒常性的例子还很多.

知觉恒常性具有重要的适应意义. 如果人类缺乏知觉恒常性,在知觉条件(观察的角度、明暗条件、观察距离)稍有变化的情况下,若维持知觉结果不变,就得重新学习. 这将使人的日常生活变得非常疲劳和难以应付,也难有余力去从事更高级的创造性活动.

3. 促进知觉学习的技术

知觉学习作为智慧技能的最低一级能力,在日常生活和课堂学习情景中是随处可见的. 如分辨形状和大小、确定方位和距离、估测时间和温度等等. 美国心理学家吉布森(E. J. Gibson)给知觉学习下了定义:在环境提供的一连串刺激的作用下,机体由于练

习的结果而出现的从其环境中获得信息能力的提高.

(1)扩大有关特征　研究表明,当学生遇到难以辨别的细微特征时,扩大需要辨别的特征,可以促进辨别学习.

如 $x>0$ 时,$y = x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2;

$x\geqslant 2$,$y = x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 $\frac{5}{2}$,主要是函数的取值范围,使具有的特征(指定区间)的变化,使学生有所知觉.

(2)对比辨别学习可分为简单辨别学习和多重辨别学习　多重辨别指同时辨别多个刺激物或多个刺激特征. 如在椭圆($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)中,$a$、$b$、$c$ 的关系有 $b^2 = a^2-c^2$;在双曲线($\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$)中,$a$、$b$、$c$ 的关系有 $b^2 = c^2-a^2$,注意辨别 a、b、c 关系特征. 另外从 $\mathrm{Rt}\triangle OF_2B_2$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OA_2B_2$ 去对比,去认识 a、b、c 关系特征.

(3)强化或反馈　这里所说的强化或反馈指当学生识别了有关特征时,教师给予肯定,如识别错误,则给予否定并加以纠正. 这会起到两种作用:第一,起激发动机的作用. 学生的学习受到教师肯定时,会产生愉快的体验,这种愉快感反过来又可推动学习的进行. 第二,起到提供信息的作用. 教师的反馈可以使学生知道自己的知觉是否正确.

斯金纳更重视强化的作用,对于刺激(s)与反应(R)的关系用一个函数式表示:$R = f(s)$ 认为反应是刺激的函数. 要了解反应只看刺激就行. 因此要特别重视对刺激的强化. 斯金纳说:"如果一个操作发生后,接着给予一个强化刺激,那么其强度就增加."他还认为使条件的速率增加,练习是固然重要的,但关键的变量是强化.

他还按合乎要求的反应次数以及各次强化之间的时距的适

当组合做出强化安排. 他提出连续强化和间断强化两大类. 连续强化容易消退,间断强化则消退较难. 就间断强化,又分为固定强化和变化时间的强化. 笔者认为:对于数学概念来说,应可分为过程强化、结论强化和练习强化. 如椭圆的概念:①引入时,展示"椭圆"图形,从视觉给予强化;②椭圆定义的强化,"在平面内,到两个定点 F_1、F_2 距离之和等于定长 $2a(a>0)$",$|F_1F_2|<2a=|MF_1|+|MF_2|$时,出示$|F_1F_2|=2a=|MF_1|+|MF_2|$时图形怎样? 在"到 F_1F_2 两定点距离之差为 $2a$",即$|MF_1|-|MF_2|=2a$ 的图形怎样? 在"空间"到"两定点 F_1F_2 距离之和"等于定长的图形怎样等;③强化 $a^2-c^2=b^2$(a 为半长轴的长,b 为短半轴之长,c 为半焦距之长);④概念后的练习强化. 强化的手段可采用奖励的方式.

值得一提的是:斯金纳把操作强化原理应用于教学中,并根据他的行为主义理论创设了"程序教学"(programing instruction 简称 PI). 因此我们在数学教学中,作为提高教学效果强化的手段,是值得一试的.

促进知觉的学习技术远不止上述几条,而且,在具体的教学中,这些技术也不是孤立应用的. 教师应根据任务的特点,综合运用各种技术. 由于注意的结果是导致知觉的集中,因此凡是能吸引学生注意的技术都能引进知觉学习. 教师在促进学生知觉学习时应考虑前面讨论影响注意的诸因素.

三、新旧知识的相互作用:同化理论

1. 新旧知识的联系

学习的信息加工过程显示,新知识在记忆系统编码、贮存和提取的过程,是与旧知识相互作用的过程. 奥苏伯尔对此进行了卓有成效的研究,提出了知识学习的同化理论. 他认为,学习的实质是新知识与学习者认知结构中已有的适当观念建立非人为的

和实质性的联系. 所谓实质性联系，指新知识与学习者原有知识网络中的符号、表象、概念、命题建立联系，建立合理的或合乎逻辑的联系. 比如，“平行四边形”与“四边形”是特殊和一般关系，在逻辑关系上是“属概念”和“类概念”的关系. 再如 gas(煤气)的谐音为“该死”便于记忆，这些联系则是人为的. 这种联系方式也是因人而异的.

2. 同化、顺应与适应

关于适应，皮亚杰认为，智慧就是适应. 而适应则依赖于有机体的同化和顺应两种功能的协调，与环境取得平衡. 心理学认为：每一个认识活动都含有一定的认知结构：图式、同化、顺应、平衡.

(1)图式即格局、基模、架构　指主体动作的认知结构，是人类认识事物的基本模式，此模式是由个体在遗传的基础上学得各种经验的整合，所构成的一个与外界相对应的抽象的认知架构，贮存在记忆中. 当个体遇到外界刺激时，就使用这一架框去核对、分析、了解、认识情境. 皮亚杰以婴儿的图式为根据，划分出感知运动图式、象征(语言)图式、具体运算图式和形式运算图式.

(2)同化　指主体将外界刺激有效地整合于已有图式之中，也就是说同化是个体以其既有的图式认知结构为基础去吸收新经验的历程，如“平行四边形”和“矩形”、“菱形”. 同化和顺应相互配合，形成对环境的适应. 同化有三种形式：其一再生性同化，指基于学生对出现的某一刺激作相同的重复反应. 如数学教师上课进教室就意味上数学课. 其二再认性同化，指基于学生在辨别事物之间的差异并借以作出不同反应的能力. 它是在再生性同化基础上出现的，有助于向更复杂的同化形式发展. 其三概括性同化，指基于学生知觉物体之间的相似性并把它们归于不同类别概括的能力.

(3)顺应　指主体改造已有的图式以适应新环境. 同化、顺应一起构成智力发展的两个机制，同化是将一定的刺激，纳入主体

已有的图式. 当主体遇到不能以原先的图式来同化新的刺激情境时,便对它加以重构,以适应变化的环境,这一顺应一旦完成,不仅增加主体的同化力,也使认知达到新的水平.

(4)平衡　指由同化和顺应所导致的主体结构和客体结构之间某种相对稳定的适应状态. 同化与顺应出现的相对量,对于主体的适应的重要性是同样的. 同化和顺应,对主体的适应是必须的.

在同化理论下,知识的构建和组织是遵循以下两条原则的:

第一,渐进分化的原则. 知识在头脑中组成一个有层次的结构,最具概括性或包摄性的观念处于这个层次结构的顶点,它下面是包摄范围较小和越来越分化的命题、概念和具体知识. 学习者在接触一陌生的知识领域时,从已知的较一般的整体中分化细节,要比从已知的细节中概括整体容易一些. 下位学习是由一般到个别、抽象到具体的认知过程,它导致认知结构不断分化和精细化. 上位学习是由个别到一般、具体到抽象的认知过程,它导致具体知识统合在一个更概括的观念下,为新的具体知识的学习提供上位观念. 学前儿童主要是通过由具体到一般的方式获得知识,而当他们入学后,获取知识的方式逐渐成为由一般到具体. 因此,教材内容的编排和呈现应遵循由整体到细节顺序.

第二,综合贯通的原则. 从一般到个别,渐进分化是知识在纵向上的构建方式,知识的组织还应注重横向上的融会贯通. 比如,将学过的知识和当前的学习材料进行比较和分析,发现彼此间的共同点和不同点,加深对新材料意义的理解. 横向的比较和联系既可以在相似的材料间进行,也可以在观点对立的材料间进行. 并列结合学习是促使知识综合贯通的典型方式.

3. 奥苏伯尔的"同化论"

学习者在学习一段语言或文字符号的材料后,在他头脑中留下的是这段材料表达的意义,而不是语言或文字符号本身. 这一点不仅符合人们的日常经验,而且得到了大量实验证据的支持.

至于习得的意义到底以何种方式在脑中记载和贮存，心理学家提出了多种不同的看法.

奥苏伯尔认为，新习得的意义必须在学习者认知结构中找到相应固着点，新的意义才能进入到学生头脑中. 由于新的意义与学生头脑中的原有固着点所形成的实质性联系的性质不同，新旧知识构成类属的、总括的、并列结合等多种不同的关系. 新旧知识通过反复同化，最后形成一个从上到下或由一般到个别逐渐分化，由这一部分到那一部分综合贯通的网络结构. 奥苏伯尔称之为认知结构，如图2-2-8 的层次网络模型图. 笔者认为：同化，就是把新知识与已有的知识发生联系后，将新知识接纳、消化.

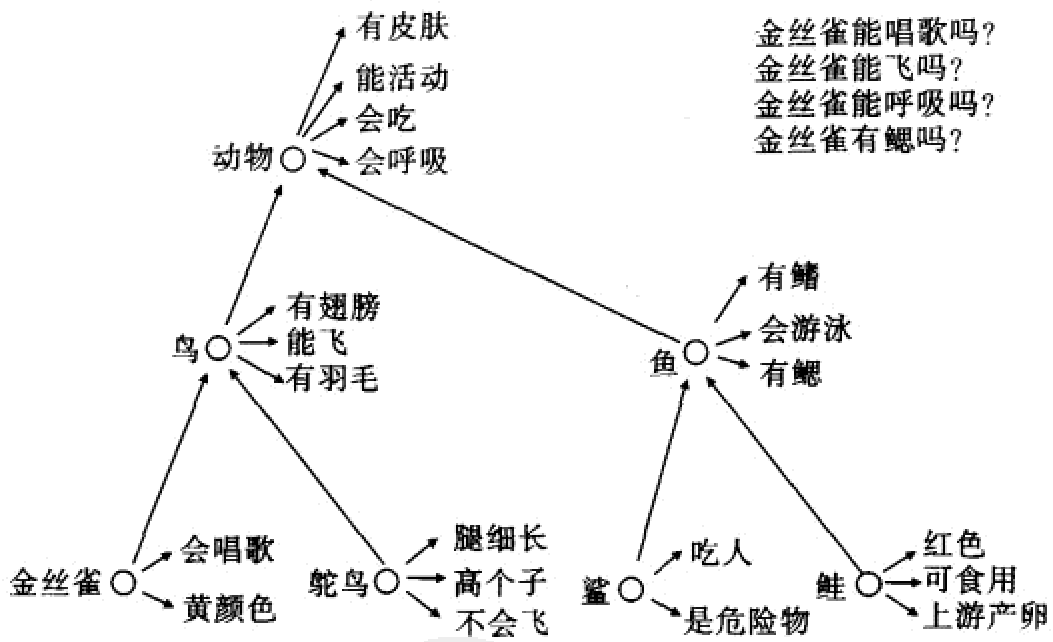


图2-2-8

（采自 Collins & Quillian，1969）

现代信息加工心理学家认为，知识分两大类，不同类型的知识表征方式不同. 陈述性知识主要以命题网络的形式表征，而同

化与顺应是有层次地交互进行，深化发展的. 例如，当学生掌握了实数的绝对值的概念以后，就形成一个图式：

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

当遇到化简$|m|$时，形式上看只需将 m 看成图式中的 x 就可得出结果. 当遇到化简$|-m|$时，形式上看只需将 $-m$ 看成 x 也就可得出结果. 当遇到化简$|-1999|$时，形式上看只需将 -1999 看成 x 就可得出结果. 当遇到化简$|x-a|$时，从形式上看，$|x|$与$|x-a|$有共同之处，其差异只是绝对值符号内 x 与 $x-a$ 的差异，那么，把 $x-a$ 整体看成 x，可得：

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & (x \geqslant a) \\ a-x & (x < a) \end{cases}$$

这基本上表现为同化的过程. 其实这个同化的过程中也包含克服一定的差异从而也有顺应的成分.

而当研究$\sqrt{x^2}$算术根时，学生就遇到了一个形式上全新的情况. 一般来说，认识全新的情况要重新建立图式.

从函数的观点来看，$|x|$与$\sqrt{x^2}$实质是同一个函数，所以：

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

这个同化过程是发现本质上的联系后而被同化的. 学生学习数学时，能够发现这个本质联系实现同化是非常重要的. 这个同化应是包含着较多顺应成分的同化过程.

对于复数 z，其中 $z = a+bi$，a，b 是实数. 这时计算$|z|$就不能简单化地套用实数 x 的绝对值公式，而必须改造实数绝对值公式使其顺应新的情况，即得到复数 $z = a+bi$ 的模的公式：

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

这个公式中，当 $b = 0$ 时，就是实数绝对值的公式. 从实数的绝对

值到复数模的图式的认知，就表现出以顺应为主要特点的认知过程. 在数学认知的建构过程中，同化和顺应相辅相成，不断出现，成为了消除差异的"目标—手段"分析过程.

§4 知识的记忆

数学知识的学习，在经历了注意和同化等阶段之后，紧接着的是对于知识在头脑中的记载和贮存. 关于记载和贮存，心理学家有许多不同的"知识的记忆"的观点.

一、知识的记忆

1. 两种记忆论

认知心理学家把记忆视作信息、编码、贮存和检查的过程. 对于记忆历程的一种假设性解释，认为感官接受外在信息后，先后经过两个阶段才能加工完毕，得以保持和使用. 即心理学中的"两种记忆论". 两种记忆论说法颇多.

从记忆时间长短分类：詹姆斯的短时记忆和长时记忆，首先以框图(图 2－2－9)的形式表示两种记忆系统模型，以此来表示心理活动的结构和信息流程.

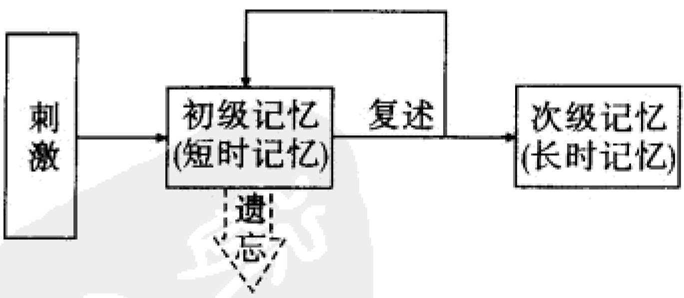


图 2－2－9

(1)20 世纪 60 年代以来，又发现不同于长时记忆的两类记

忆. ①短时记忆其容量为 7 ±2 组块(或记忆组块),这种记忆时间不超过一分钟,多为语言听觉编码,且极易受到干扰. ②感觉记忆又称瞬时记忆,其保持时间约一秒钟,但有相当大的容量,信息是完全依照刺激的物理特性来编码的.

记忆结构、模型的核心承认长时记忆外还存在短时记忆,但美国彼德森夫妇实验证实记忆还是分为长时记忆和短时记忆. 阿特金森和希夫林则由感觉记忆、短时记忆、长时记忆三个存贮系统,提出了多存贮模型.

从图 2-2-1 中可看出:外界信息首先进入感觉记忆,如视觉登记 A 的图像,这种形式保持约一秒钟,然后很快消失. 但其中受到注意的那一部分信息可能得到识别进入短时记忆. 短时记忆也称工作记忆是一个加工器,它接受来自感觉记忆的信息,并从长时记忆中提取信息进行有意识的加工. 复述短时记忆的重要保持机制,它能使短时记忆进入长时记忆. 长时记忆,其容量极大,保持长约一分钟,甚至可长久保持. 也就是说长时记忆贮存从感觉记忆和短时记忆来的信息,同时长时记忆的信息可被提取到短时记忆中去,供认知系统使用. 感觉记忆,短时记忆和长时记忆是一个系统,短时记忆对于长时记忆起着重要作用,在数学学习中使用这一个理论对提高教学效果有帮助.

(2)关于长时记忆　如何使长时记忆即信息在记忆中保持的时间更长一些,加拿大心理学家图尔文和唐纲森作了研究,他们把长时记忆分为两种:①情景记忆(或情节记忆)即对个别经历的、发生在一定时间和地点的事件(情景)的记忆. 在数学中,通过概念形成的过程进行记忆也可视为情景记忆. ②语义记忆即对各种有组织的知识的记忆. 包括字、词、概念、公式、规律的记忆. 如:见到方程 $y = ax^2 + bx + c$,就会想到它是抛物线. 语义记忆比感觉记忆更抽象和概括,较少受到干扰和时空限制,提取信息更迅速,往往不需要探索. 语义记忆与长时记忆并不是完全分割的,是互

相依赖的.

(3)关于语义记忆　近30年来,心理学家又对语义记忆进行研究,语义研究分为两类:一类是网络模型,指一切由结(代表概念的单元)和连线(代表概念间的关系的模型)组成.它包括两种:①层次网络,该模型是以网络形成分层次存贮,所以层次按上下级关系分成若干层次.它类似数学中的知识结构图,如图2-2-10数系表.②激活扩展模型.它认为语义记忆是一个巨大的网络,网络连接的概念不是孤立的词.两者不同的是激活扩展模型能够解释语义的距离效果.依据这个模型在概念与概念之间既有上下级关系,同时连线的长短,表示语义距离的远近.

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数
        - 0
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数
  - 虚数

图2-2-10

2. 陈述性知识的遗忘

记忆与遗忘是两个相对立的心理学现象,从知识表征的研究可见,陈述性知识的本质是语言文字或其他符号所表达的意义以网络结构的形式贮存在人脑中.研究还表明,真正理解了的概念不易遗忘.

对于长时记忆遗忘的原因,心理学有多种解释:一种是消退说,即记忆获得的信息在头脑中留下的痕迹因未得到巩固和加强,痕迹便逐渐消退乃至遗忘;另一种是干扰说,即遗忘是信息间

的相互干扰而产生的抑制作用造成的. 由于干扰说得到许多实验的支持,因而,众多心理学家赞同这个观点.

实验研究表明,干扰有两种:一种是先前学习对后继学习的干扰,叫前摄抑制;另一种是后继学习对先前学习的干扰,叫倒摄抑制,长期教学实践发现,一学期的知识两端部分学习快、记得牢,而中间部分学得慢、记得差一些. 原因是中间部分既受前摄抑制又受倒摄抑制的干扰,而两端只受一种干扰.

现代认知心理学认为,长时记忆中的信息是不能提取也无法回忆的编码线索,其原因是在贮存时没有适当编码. 因此解决知识的编码或组织问题就是解决遗忘问题.

二、知识记忆的策略

对于知识的记忆,尤其是长时记忆,从长期的学习和实践的感觉,以及从调查结果中发现,有几种方法有利于提高学习效率. 简述如下:

1. 精加工

皮连生教授所说的"精加工"指对学习材料作精细的加工活动,即通过在要记忆的材料上增加相关的信息来达到对新的材料记忆的学习方法. 如对材料补充细节、举出例子、作出推论,或使之与其他观念形成联想等.

对于复杂陈述性知识的笔记方法,包括摘抄、评注、加标题、写节段概括语和结构提纲等活动. 研究表明,学生不但可以借助做笔记来控制自己的注意,而且有助于发现新知识的内在联系,帮助新旧知识建立联系.

梅耶等人以大学生和中学生为被试对象,对做笔记技术进行了研究. 被试分两组:A 组在观看 15 分钟有关计算机程序或统计学内容的录像时运用做笔记技术;B 组单纯观看录像. 学习后测验两种迁移效果:一是近迁移(在与学习材料相似的任务中的迁

移)；二是远迁移(在与学习材料不相似的任务中的迁移). 得到的结果是：对低能生来说，在计算机材料或统计学材料的测验中，A 组近迁移成绩略低于 B 组，远迁移成绩则显著高于 B 组. 对高能生在测验中，A 组的近迁移和远迁移成绩都高于 B 组.

巴纳特(J. E. Barnett)也做了一个实验，在阅读和听讲时，一边听，一边记笔记，或加边注. 这些边注、评语等内容不仅可以促进学习者对知识的理解，而且为今后的回忆提供了线索. 为了培养学生做笔记的良好习惯，教师讲课时应注意语速不宜过快，复杂的内容要重复讲述，把讲课内容的结构、层次和重点写在黑板上等等，以便于学生记笔记.

2. 组织策略

组织策略是将分散的、孤立的知识集合成一个整体并表示出它们之间关系的方法. 如空间两直线，位置关系按交点情况分类，无交点：平行线，异面直线；有交点：相交直线. 按是否在一个平面分类，在一个平面内：相交直线、平行直线；不在一个平面内：异面直线.

知识(或信息)的保持，除采用多次复述外，很重要的策略就是对信息进行编码. 利用表象对信息编码和按语意编码是两种有效的策略. 如图 2－2－11 利用正六边形图式来记忆同角三角函数的基本关系式，就是利用正六边形的形象进行编码，“相邻三个顶点‘中’等于‘左、右’之积”，如 $\sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha$；“对角线是倒数关系”，如 $\sec\alpha \times \cos\alpha = 1$. 此外，还有倒三角形顶点的平方关系如 $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$，$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 等.

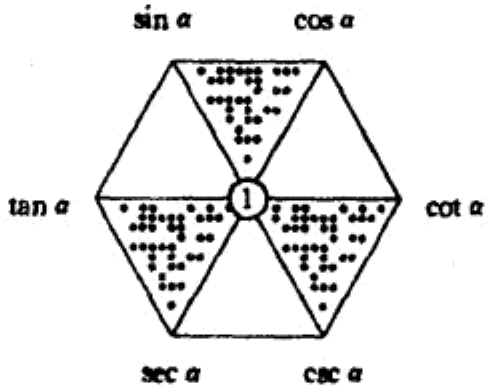


图 2-2-11

3. 复述策略

复述即为了保持信息而对信息进行多次重复的过程. 如学生为了记住某些材料,一遍遍地念、背、写. 结果发现,年龄大的学生比年龄小的学生更多地表现了嘴唇运动,记住了更多的内容. 在同龄组,嘴唇运动多的学生回忆成绩高于未出现嘴唇运动的学生.

早在1917年,盖茨(A. T. Gates)就对单纯阅读及阅读(占40%的时间)同复述(占60%的时间)相结合进行对比研究. 发现后者的回忆成绩平均高出前者30%. 另外,复述时间的分配与年龄有关,对大龄学生来说,复述时间占学习总时间的80%与60%的效果一样好. 其他相关研究还发现,在复述中插入问题会有助于学习.

4. 恰当安排复习时间的策略

学习者如能恰当安排复习时间,也能有效地提高学习效率. 据此,对那些程度高的学生可以收到事半功倍之效. 如果知识的内容是有意义或有趣,学懂以后不易遗忘,复习时间可以适当延后.

另外,为了减少复习中的疲劳和前摄抑制、倒摄抑制的负面影响,宜采用分散复习而非集中复习. 如对数学有关定义、定理、公式、思路和方法,在学习运用之后,再进行复习将有助于提高学习效率. 关于复习可在老师指导下复习,但主要靠自己复习.

当然,凡是能促进注意和知觉的方法,都能促进陈述性知识的巩固.

三、促进陈述性知识向程序性知识转化

1. 关于程序性知识的分类

根据不同的目的和划分标准可以对程序性知识进行多种分类.

上面已经提到,加涅根据信息的加工过程和执行控制过程把程序性知识分为对外办事的程序性知识和对内调控策略性知识. 她的女儿加涅进一步根据自动化这个维度和一般与个别维度对程序性知识分类,如图 2-2-12.

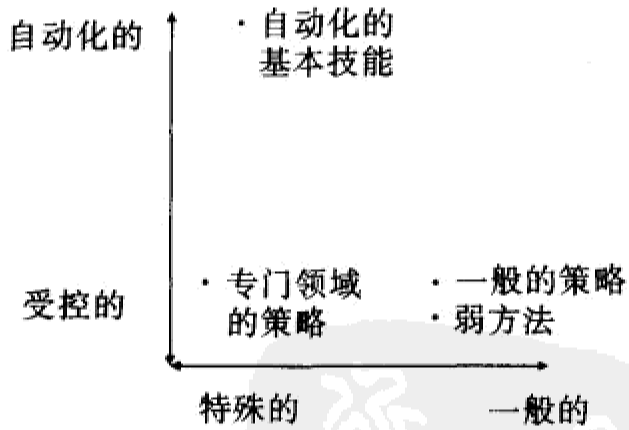


图 2-2-12

根据自动化这个维度,把程序性知识分为可以达到自动化的,如中学的完全平方公式、平方差公式等. 但有一些程序性知识

难以自动化，需要受意识控制，如数学中解应用题的方法和步骤. 若这样一些方法和步骤支配人的阅读、解题的认知活动，提高了人的认知活动效率，则这些方法步骤已经转化为对内调控的认知策略. 根据特殊性维度，可以把程序性知识分为专门领域的和非专门领域的. 专门领域的方法、步骤只能适用于较小的领域，前面介绍的复述策略仅适用于系列学习，精工策略仅适合于配对联想学习. 非专门领域的方法、步骤一旦被人掌握以后，能在跨学科情境中应用. 如发散思维，当遇到一个不熟悉的问题后，能从多角度考虑问题，不匆忙作出结论等. 这一套思维方法适合于多种学科、多个领域，被称为一般解决问题的策略. 这种一般解决问题的方法与学科领域中的具体方法不同，它不能保证解题成功，所以又称弱方法. 而学科领域的具体方法能保证解题成功，被称为强方法.

不论是方法或策略，或者是技能，总是可以归结为一些规则或操作步骤. 如，现在有一个圆锥体，需要计算它的体积. 其操作步骤是：①测出圆锥体的底面积或底面半径；②测出圆锥体的高；③利用公式 V(圆锥体体积) $= \frac{1}{3}Sh$（这里的 S 是圆锥体的底面积，h 是它的高）便可计算出圆锥体体积.

如果学生仅能陈述这些规则或步骤，则学生只习得陈述性知识. 如果学生能按这些规则或步骤办事，则这些规则支配了他的行为，说明规则和步骤已转化为程序性知识，变成了学生的技能.

从上述例子可知，掌握程序性知识的实质是掌握做事的规则，而规则中包含了概念. 一条规则总是由若干概念通过一定关系构成的，如上述的例题中涉及的概念有圆锥体、圆锥体的高、底面积、底面半径等. 学生掌握程序性知识，实质上主要是掌握概念和由概念构成的规则，使之支配人的行为. 所以陈述性知识向程序性知识转化时，并不是所有的陈述性知识都可以转化为程序性

知识.

2. 促进概念的习得与运用

(1)概念分析　概念都可以作下列四方面的分析.

1)概念名称　人类的大多数概念有名称. 如"三角形"、"平行四边形"、"圆"等词,若它们所代表的是同类的"事"或"物",则它们就是概念的名称.

2)概念例证　由于概念是用符号(或概念名称)所代表的同类事物,那么同类中的个别事或物便是概念的例证. 例如:"平行四边形"这个概念的例证是矩形、菱形、正方形. 故称这为正例. 不属于这一类的事物叫反例. 如在学习 $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ 时 $\sin(x+y) \neq \sin x + \sin y$,则是反例.

3)概念属性　又称关键特征或标准属性. 是指概念的一切正例的共同本质属性. 例如:平行四边形本质属性是两组对边平行的四边形.

4)概念定义　指同类事物共同本质属性的概括. 如"平行四边形是两组对边平行的四边形". 这一命题是平行四边形概念的定义. 另外还有些概念,如心理学中的知觉、思维、智力等,所指的并不是世界上存在的事物,而是事物的某些属性,这些属性又不能直接观察和测量,只能从人的行为或反应中间接推测. 这些概念一般难以严格定义. 科学家为了研究方便,常采用操作定义.

概念学习意味着学生掌握一类事物的共同本质属性. 由于概念的正例除了共同本质属性以外,还有许多非本质属性(又称无关属性或无关特征),例如,"直角三角形"的本质属性"它是一个三角形"、"有一个角是直角"、"面积等于两直角边乘积的一半"等;非本质属性如"一个锐角为另一个锐角的二倍". 所以概念学习也意味着学生能辨别同类事物的本质属性与非本质属性. 对于那些难下定义的概念来说,学生应能列举有关概念的多个例证,同时辨别它们与邻近概念的异同.

按概念的抽象水平可以将概念分为具体概念和定义性概念两类.前者指一类事物的共同本质特征可以直接通过观察获得,又如"是一个三角形"、"有一个角是直角";后者指一类事物的本质特征不能通过直接观察获得,必须通过下定义来揭示,如直角三角形面积为二直角边乘积的一半.

(2)促进具体概念的习得与运用　在进行小学数学中的"圆柱体"概念的教学时,教师首先给学生呈现预先准备的实物如"电棒"、"易拉罐"、"竹笛子"等等,并告诉学生,这些都是圆柱体.然后呈现一些非圆柱体实物,如"粉笔"、"胡萝卜"、"多棱体",并告诉学生,这些不是圆柱体.接着请学生仔细观察这些物体的形状特点,并请他们用语言概括出这些特点.最后,学生发现圆柱体"上下两个面是大小一样的圆,中间一样粗细",并能从学具中、生活用品中正确找到圆柱形物体.

从以上例子可以看出,具体概念的习得过程经历了知觉辨别(辨别碗和圆柱体的形状、大小)、假设(圆柱体的上下两个面好像是圆的、碗好像比杯子浅)、检验假设和概括四个阶段.概念越是复杂,检验和假设间的往复次数越多.在这个过程中,教师在教学中必须为学习者提供概念的正反例证,正例要有变化,否则学习者会将非本质属性作为本质属性来概括.如直角三角形只出示"等腰直角三角形"的教具,会使学生对"两直角边不等"情形排斥在直角三角形之外.反例的呈现有助于学生辨别,使概念的概括精确化.另外,学习者必须从外界获得反馈信息,以检验他的假设是否正确.

(3)促进定义性概念的习得与运用　许多概念属于定义性概念,它可以通过直接下定义的方式来揭示某类事物的共同特征.比如,学生先前已学过"圆"的概念,其本质是"在平面内到定点距离等于定长 $r(r>0)$"的图形.现在要学"平行四边形"的概念,本质是四边形的两组对边平行.通过观察实物、图形、边来掌握它的

本质属性.

上述获得概念的方式被奥苏伯尔称为概念同化，其心理机制可用奥苏伯尔提出的下位学习模式来解释. 概念同化是从上位到下位的学习，所需的条件与概念形成不同. 它要求学生认知结构中具有同化新概念的适当的上位结构，而且，这一上位结构越巩固、越清晰，新的下位概念的同化就越容易发生.

定义性概念的教学，也可用概念形成的方式. 比如，圆周率(π)是一个定义性概念. 在教 π 这个概念时，让学生测量圆的直径分别为 1 cm、2 cm、3 cm 和 4 cm 的周长(用绳子绕一周，绳子长度即为圆周长)，然后让学生将量出的周长作记录. 由测量的结果可见，若圆的直径为 1 cm，则周长 3 cm 多，若圆的直径为 2 cm，其周长为 6 cm 多……

接着，再让学生计算各圆的周长与直径之比，结果发现它们的值大致相同. 最后，教师告诉学生：这个值的精确数为 3. 1416……它就是圆周率. 为了加深学生的认识，还可以取直径为任意长度的圆，测量其周长，并计算其周长与直径之比. 如果测量很精确，那么，这个比值是 3. 14 多一点，从而证实了原来的结论.

总之，概念同化与概念形成是学生掌握概念的两种重要形式. 随着学生知识结构越来越复杂，概念同化这种学习形式更为重要，两种学习形式所要求的心理过程不同. 在概念形成中，要求学生进行辨别，提出与检验假设和发现概念的本质属性. 在概念同化与概念形成中，都要求让学生将自己原有的知识与新呈现的材料在头脑里发生积极的相互作用，才能将外部提供的材料转化为自己的认知内容. 所以这两种概念学习都是积极的有意义的学习.

3. 促进规则的习得与应用

概念一般以词或符号来表示，规则以言语命题或句子来表

达. 如圆柱体体积 $V = S \times h$.

规则同概念一样,也有例证. 但是规则的例证不是一类事物的例证,而是几类事物的关系的例证,更确切地说,是几个概念之间的关系的例证. 如:凸 n 边形的内角和是 $(n-2) \times 180°$, $n \geq 3$ 的整数,当 $n = 3$ 时,是 $(3-2) \times 180°$; $n = 4$ 时, $(4-2) \times 180°$……同样,也可以找到无数例证来演示这种关系. 所谓规则学习,实质上就是能用大量的例证来说明规则反映的关系.

(1)从例子到规则的学习　从例子到规则的学习方法简称"例—规法".

这是一种教师呈现规则的若干例证,让学生从例证中概括出一般结论的学习方法. 在这种情形下,学生进行的是发现学习. 用奥苏伯尔的同化学习理论来看,它属于上位学习.

在某小学五六年级进行的"n 个连续奇数和的简单计算公式"的实验,显示出规则发现学习的一般过程和条件. 这一计算公式的命题表述是:n 个连续奇数和等于奇数个数 n 的平方. 被试分 A、B 两组,两组被试所得到的例子如下:

A 组例子	B 组例子
$1 = 1^2$	$1+3+5 = 3^2$
$1+3 = 2^2$	$1+3 = 2^2$
$1+3+5 = 3^2$	$1+3+5+7+9 = 5^2$
$1+3+5+7 = 4^2$	$1+3+5+7 = 4^2$
$1+3+5+7+9 = 5^2$	$1+3+5+7+9+11 = 6^2$

要求两组学生根据呈现的例子,找出规律,用最简便的方法求 $1+3+5+7+\cdots$一直加到 99 的和. 结果看到 A 组例子的学生多数能发现规则,而 B 组例子的学生无人发现规则.

在上述例子中,学生的认知过程同概念形成中的过程相似,都需要进行辨别,提出假设与检验假设并进行概括. 但这里对认

知要求更高,因为这里的认知对象不是具体事物,而是由概念构成的关系. 因此,规则学习必须在学生已经掌握有关概念的基础上才能进行,这是规则学习的内部条件. 规则学习的外部条件是教师呈现若干体现规则的例证,而且例证的排列方式要具有规律性. A 组和 B 组学生学习结果的差异明显受规则例子呈现方式的影响. 在有些情况下,呈现模型、图表等直观教具,有助于学生发现规则. 同时在学生遇到困难时,教师应给予适当提示,在课堂教学情境中,学生更多的是在教师指导下的发现学习.

(2)从规则到例子的学习　从规则到例子的学习简称"规—例法".

这是一种教师先呈现学生要学习的规则,然后用例子来说明规则的学习方法. 在这种情形下,学生进行的是接受学习. 它符合同化理论中的下位学习模式.

规—例法教学的最重要条件是学生对构成规则的概念已经掌握,否则,学生不可能真正掌握这一规则. 数学中如立体几何中学过异面直线的定义,让学生举出两直线异面的例子. 如学过二项式定理之后,求问题中的第 $r+1$ 项的系数和二项式系数等.

另外,如果学生认知结构中具备适当的上位规则,将会使新规则的学习更加稳固和容易. 例如,在学生学习了圆柱体的体积计算公式后,接着学习圆锥体的体积计算公式. 由于锥体的体积是它等底等高的柱体体积的三分之一,教师可以依据这一关系,将圆柱体积计算公式作为同化圆锥体体积计算公式的上位规则,引导学生发现新旧知识的相同点和不同点,促使学生形成清晰和分化的认知结构.

4. 变式练习在程序性知识习得中的作用

同样是一个概念或规则,如果学生记住了它的含义,并能用自己的话来陈述它,只能说明概念或规则的学习还处在陈述性阶段,尚未转化为一种解决问题的技能. 我们经常能看到有些学生

对一些公式、定义、规则，说得头头是道，但一遇到问题情景往往束手无策，或者屡屡出错. 这种情况往往是缺乏练习的结果.

练习是学习者对学习任务的重复接触或重复反应. 对某一学习任务进行不断的接触和反应，是形成某种熟练技能必须经历的过程. 为使得学生将理解了的概念和规则转化为一种解题能力，需要变式练习. 所谓变式练习，就是在其他有效学习条件不变的情况下，概念和规则例证的变化. 具体说来，就是在知识习得阶段概念和规则论例的变化，它有助于学习者排除无关特征的干扰. 在知识转化和应用阶段题型或问题情景的变化，将有助于学习者获得熟练解决问题的技能.

如$|F_1F_2| = 2c > 0, a > 0$，平面动点 M 使得$|MF_1| + |MF_2| = 2a$，则：

①若 $2a>2c$ 时，M 的轨迹是什么曲线？

②若 $2a = 2c$ 时，M 的轨迹是什么曲线？

③若 $2a<2c$ 时，M 的轨迹如何？

5. 策略性知识学习的特殊性

由于策略性知识也是程序性知识的一种类型，上面论述的程序性知识学习的规律也适合于指导认知策略的学习. 也就是说，在认知策略学习中也必须掌握概念和由概念构成的规则. 但构成策略性知识中的概念和规则不同于反映具体事物性质的概念和对它们加工操作的规则. 所以教师还必须注意策略性知识学习的特殊性.

第一，如上所述，认知策略是对内调控的技能，它所涉及的概念和规则反映人类自身认识活动的规律. 而人类的认识活动潜藏于人脑内部，无法从外部直接观察到，这类概念和规律难以通过直观演示的方法教给学生. 所以认知策略教学的一个难点是教师通过实例向学生展示策略如何应用的情境.

第二，认知策略所涉及的概念和规则一般都有较高的概括

性，在应用时有很大的灵活性.因此认知策略的学习一般不可能短期见效.

第三，认知策略的学习和运用，受学生自我认知发展水平的制约.认知发展的自然顺序是先认识外界世界，后认识自己本身.策略性知识学习的最高水平是学习者不仅能在训练过的情境中应用某种学习过程的策略，而且应能把习得的策略迁移到未训练的情境中.西方的“4个W”学习法对策略性知识的形成和升华有着重要价值，学习者必须清晰地意识到所学习的策略是什么(what)，它所适用的范围(where)以及怎样(how)和什么时候(when)应用.那么要解决这4个“W”的问题关键是学生要解决自己认知过程的认知问题、认知策略的训练与反省认知的结合.

§5 知识的运用与迁移

知识的迁移指先前习得的知识在新的学习情境中运用并促进新的学习.知识的运用和迁移两者是同质性概念，所以，在本节对迁移的讨论中会涉及运用.

一、学习的迁移

1.传统迁移概念与迁移分类

在日常生活中，我们常常会看到这样的现象：声乐学习中，学会演奏一种乐器之后，对另一种乐器的学习就显得容易.学会了骑自行车的人，学骑摩托车就很快.心理学上把一种学习对另一种学习的影响称为迁移.这里的学习包含认知、动作技能和态度情感三类.这里着重在认知上谈一点迁移的运用.

2.从现代认知心理学看知识的迁移与运用

现代认知心理学把知识的迁移看成先前学习的知识在后继学习中的运用.现代认知心理学把知识分为陈述性的与程序性的

两大类,由此而出现了对知识迁移的新的分类,见图 2-2-13.

原有知识	目标知识	
	程序性的	陈述性的
程序性的		
陈述性的		

图 2-2-13

图中原有知识是先前习得的知识,目标知识是迁移阶段要学习的知识. 两者都包括陈述性和程序性知识两类,这样就形成四种迁移:

(1)程序性知识向程序性知识的迁移　当先前习得的产生式直接运用于迁移任务时,便出现此类迁移. 比如,学生习得了圆面积计算的产生式后,在他遇到“已知半径或直径的长度,求圆的面积”的问题时,就可以直接运用这一产生式. 如果原有的产生式已相当熟练,这种迁移可自动产生.

(2)陈述性知识向程序性知识的迁移　当原先习得的陈述性知识有助于迁移任务中产生式的习得时,便出现此类迁移. 这里有两层含义,一层含义是指技能习得过程中,在变式练习的条件下,由陈述性向程序性转化,这本身就反映了陈述性知识向程序性知识的迁移. 另一层含义是,陈述性知识有助于一些新技能的学习,如学过一些数学概念之后,去解决一些生活中的数学问题.

(3)程序性知识向陈述性知识的迁移　当原有认知技能促进新的陈述性知识的学习时,便出现此类迁移.

(4)陈述性知识向陈述性知识的迁移　当原有陈述性知识的习得有助于(或干扰)新的陈述性知识的习得时,便出现此类迁

移. 比如,上位知识的习得将有助于新的下位知识的学习.

学习有先后之分,我们把先前学习对后继学习的影响称为顺向迁移,反之叫逆向迁移.

另外,迁移又分为正迁移、负迁移两类,与顺向和逆向迁移组合之后为四类.

二、利用迁移原理,促进新的学习

1. 塑造良好的认知结构,促进陈述性知识的迁移

奥苏伯尔认为认知结构的三个变量影响新的学习或迁移的发生. 所谓认知结构,就是学生头脑中的知识结构,广义地说,是学生已有观念的全部内容及其组织;狭义地说,它是学生在某一学科的特殊知识领域中的观念的全部内容及其组织. 影响陈述性知识迁移的三个变量是:

(1)可利用性　指在新的学习任务面前,学习者原有认知结构是否具有用来同化新知识的适当观念. 针对数学学习,就是原先已学的知识是否具备. 根据奥苏伯尔的理论,下位学习一般比上位学习和并列结合学习容易发生,因此,如果原有认知结构有适当的、概括程度高和包摄性强的知识,新的学习就容易发生.

(2)稳定性　指面对新的学习任务,原有的可利用知识本身的巩固程度. 原有观念越稳固,越有助于新的学习.

根据奥苏伯尔的迁移理论,要促进原有知识向新的学习迁移,教学中应注意三个方面:第一,加强基本概念与一般原理的教学. 例如,学习乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$时,如果学生对该知识的概括水平较高,即能认识到上式中的字母,不仅代表一个数,而且也能代表一个代数式,从而能对形如$(a+b+c)(a-b-c)$的算式稍加变形得到$[a+(b+c)][a-(b+c)]$,再应用公式进行计算,那么正迁移就能顺利地实现;反之,如果学生对以上知识的概括水平不高,认识不到旧课题$(a+b)(a-b)$与新课题

$(a+b+c)(a-b-c)$在本质上的共性,那么迁移就会发生障碍.正如美国心理学家布鲁纳所说,掌握一般概念是通向普遍迁移的大道.第二,注意新旧知识异同的比较.在利用原有知识来促进新知识学习时,由于新旧知识之间有相同点,可以利用原有知识来同化新知识.但是,如果不注意比较新旧知识的异同,则先后两种知识可能产生混淆.数学教学中每一个环节都要考虑新旧知识的联系.有的学生不管整数加法与分数加法的区别,他们会做$1+1=2, 2+3=5$,但对分数加法则出现$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$的错误,这是负迁移在作怪.再如,分数的加法运算$\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{3+5}{2}\right)$与分式的加法运算$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}\right)$,其中刺激因素与反应因素均类似,当学生掌握分数的运算后,就容易迁移到分式运算的学习上去.又如,绝对值与算术根的有关概念,即

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases} \quad 与 \quad \sqrt{a^2}=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

它们的刺激改变,但反应不变.在学生弄清$|a|$与$\sqrt{a^2}$的关系后,就容易产生正迁移.而$(a+b)n=an+bn$与$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$,刺激类似,反应改变,负迁移容易产生,有些学生常常发生$(a+b)^n=a^n+b^n$的错误.可见提示前后知识之间的共同因素与不同因素,有利于正迁移的干扰发生.第三,必须注意先前习得的知识的巩固.原先习得的知识如果不巩固,当后面学习相类似的知识时,两者容易产生混淆.

2. 运用智慧技能学习原理,促进智慧技能学习和迁移

加涅认为,可以把迁移分为纵向迁移和侧向迁移两种类型.侧向迁移指知识或技能在相同水平上的迁移.如学习了乘法交换律,即$A\times B=B\times A$,应用于$3\times 5=5\times 3$和$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$等

不同情境中. 纵向迁移指低位的技能向高位技能迁移. 如学习了加法应用于乘法情境,学习了概念应用于规则学习情境,学习了简单规则运用高级规则学习情境. 所以应用加涅的智慧技能层级理论来指导教学,有助于先前习得的智慧技能的迁移和新的高一级智慧技能的学习.

3. 运用反省认知理论,促进策略性知识的学习和迁移

反省认知在认知策略的迁移中起关键作用. 大量的策略训练研究表明,在特殊情境中训练的策略,往往不能在新的情境中应用. 也就是说,策略训练不能接受迁移实验的检验. 新近的研究表明,如果把策略训练提高到反省认知水平,则策略训练的迁移效果良好. 因此,从迁移的观点看,我们在教学中不仅应教给学生某些学习、记忆、阅读或写作的方法,而且在教学中应注意解决四个"W"问题. 这样,策略训练将会出现良好的迁移效果.

4. 数学问题的解决过程及其知识类型分析

现代认知心理学把解决数学问题的过程分解为读题与分析、列式、解题、调控四个过程. 我们以一数学题为例.

"甲、乙两庄距离4公里,小明、小刚从甲庄出发往乙庄. 小明每小时走2 000米,小刚每小时走3 000米. 小明比小刚提前30分钟出发,问小刚追上小明时距离乙庄还有多远?"

(1)读题与分析　指解题者形成问题的过程,表现为明确问题给定的条件、目标及允许的操作范围等等. 通俗的说法就是读懂题目,理解题意,这在心理学上叫问题表征. 其心理过程就是学习者将外在印刷符号所表达的题意转化为内在的命题表征. 其外在表现就是学习者能用自己的话陈述问题的条件和目标. 这是第一层次的问题表征. 解题者要完成这些,必须具备有关语词知识和数学知识. 如理解"距离"、"提前"、"追"等词的含义,知道"1公里 = 1 000米","1小时 = 60分钟"等等. 这些均属于陈述性知识.

问题表征的第二个层次是深层理解，即在表层理解的基础上将问题综合成一个有关条件及目标的统一的心理表征.

(2)运用中学的方法设计解题计算(列方程)

设:小刚用的时间为 x 小时，设相遇处到乙地的距离为 y 公里，由题得方程组

$$\begin{cases} 2\,000\left(\dfrac{1}{2}+x\right) = 4\,000-y \\ 3\,000x = 4\,000-y \end{cases}$$

(3)解方程(解决问题)

$x = 1 \qquad y = 1\,000$

(4)自我调控　这一过程实际上贯穿解决问题的整个过程，它包括考察问题的表征是否正确、解题计划是否能达到最终目标、计划的执行过程是否正确，如对分式方程、无理方程的解的检验，判断最终的解答是否符合要求等等. 在这个过程中，学习者主要应用自己的策略性知识及反省认知的能力.

从上述分析可以看出，陈述性知识、程序性知识和策略性知识在解题的每个阶段所起的作用是不同的，而反省认知能力在整个过程中起重要作用. 早在 19 世纪，皮亚杰在知识建构机制方面，就强调自我调节. 自我调节的重要特点包括：自我调节比遗传性的传递更普遍，自我调节最后导致高级水平的必然出现等. 主体就是通过反省抽象和自我调节机制促使知识的广度与深度不断提高，也促使新的结构经常处于建构之中.

参考文献

1. 关成志主编. 数学思维概论. 沈阳：辽宁教育出版社，1993
2. 解恩泽，赵树智. 数学思想方法纵横论. 北京：科学出版社，1987

3. 张春兴,车文博著. 西方心理学史. 杭州:浙江教育出版社,1998

4. [美]鲍尔,E·R 希尔加德. 学习论. 邵瑞珍,皮连生译. 上海:上海教育出版社,1987

5. 戴维·韦尔斯著. 数学与联想. 李志光译. 上海:上海教育出版社,2000

6. 河南高师院校数学教育研究会. 数学方法论. 郑州:河南教育出版社,1996

7. 皮连生. 学与教的心理学. 上海:华东师范大学出版社,2003

8. [荷兰]弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学. 陈昌平等译. 上海:上海教育出版社,1995

第三章 学习动机与数学学习

动机是学习个体进行学习(包括数学学习)的重要一部分,动机对认知学习具有重要作用.在本部分第一章的数学学习里,就将“学习动机”与“数学认知”视为并列关系.本章对动机和动机对于认知学习的意义进行探讨.

§1 动机对于学习的意义

1. 关于动机

心理学家都同意把学习个体的学习行为起因归结于学习者的某种动机.心理学家的观点,并不一定为所有人所接受.笔者也曾一直认为数学学习仅与个人的智商有关,从而忽视学习个体的学习动机作用.但是,在教学实践中经常遇到这样一些学生:本人很聪明,但就是不愿学习,有的还说“数学题并不难做,就是不想做”.目前这样的学生群似乎还在增长.反思数学教育,发觉心理学的动机理论可以解释数学教育中“数学题不难做,就是不想做”的现象.动机是什么?“动机”就如“汽车中的发动机”;如“火箭”的动力系统.动机是驱使人们活动的一种动因或力量,包括个人的意图、愿望、习惯、心理的冲动或企图达到的目标等.

动机具有两种功能:一是唤醒功能.就从事某一活动来说,具

有适当动机的人同不具备适当动机的人相比，前者唤醒水平高，注意力集中，后者唤醒水平低，注意力分散．二是指向功能，当动机推动人的活动时，这种活动总是具有一定的指向性，即促使人的行为指向某一客体而相应地忽视其他的客体．

2. 动机的差异

前文曾谈到过个体差异，其中包括个体间的动机差异．这是因为，动机的关键之处是需要，因为人们的需要不同，导致人们行为的动机不同．

心理学家尝试对人的多种多样的动机进行分析．例如，根据动机的起源，可分为生理动机和社会性动机；根据动机内容的社会意义，可分为高尚的、正确的动机和低级的、不正确的动机；根据动机作用的时间的长短以及它与活动目标的关系，可分为短暂的、具体的动机（近景性动机）和长远的、概括的动机（远景性动机）；此外，根据动机的动力来源，可分为内部动机和外部动机，等等．

在上述多种动机分类中，只有内部动机与外部动机的划分得到心理学家的公认，并且它们对教育实践具有重要的应用价值．内部动机（又称内部动机作用），指人们对活动本身的兴趣所引起的动机．动机的满足在活动之内，不在活动之外．例如因为对学习数学有兴趣，其活动的动机是内部动机．外部动机（又称外部动机作用），指人们由外部诱因所引起的动机，动机的满足不在活动之内，而在活动之外．例如，学习数学出于升学的欲望，认为数学学习对自己的发展有必要．

3. 对影响数学学习动机的因素调查

在教学活动中，笔者通过与学生交谈，并对影响学生数学学习动机的情况进行了调查，认为学生厌烦数学学习大致分为个人的生理和心理因素、社会的影响、教学中的因素等．其表现为：

——数学的抽象性、严谨性和教学中过早的抽象训练，使学

生产生对数学单调和枯燥的感觉.

——对数学的意义和数学的价值认识不足,并认为数学的用处和目的存在距离,感到学习数学无用.

——学生本身性格差异,如喜爱文学、体育、文艺方面……个人的价值观不同,引起的厌学.

——学生生长发育期间的情绪对数学兴趣的排挤.

——以前"精英教育"、"应试教育"的弊端,导致考试和升学无望的学生对数学产生厌倦,对数学失望;今天,有的学生因为无力支付高额的学费,影响了经济困难学生的数学兴趣.

——社会对数学价值忽视,认为"不学数学也过一辈子",对学生产生了不良的影响.

——社会对数学人才不重视和对人的数学素质的冷漠产生的副作用.

——学校滥发证书,和社会上的"假证泛滥",为一些人提供投机机会,使数学学习的过程"贬值".

——娱乐场文化的蒙蔽和诱惑,对学生数学兴趣干扰.

——学术界"蒋春暄现象",给学生造成的负面影响.

——教法陈旧及师道尊严的课堂文化,使学生对数学兴趣渐减.

——理论与实际联系不够,使学生对数学的目的感到茫然.

——学生个人、家庭、环境的一些非常偶然的变化所引起的情绪波动,导致数学兴趣的波动.

§2 关于动机作用的心理学理论

由于学习个体存在差异,人们的学习动机也多种多样,存在着差异. 同样,人们对动机的作用也有多种多样的解释.

一、弗洛伊德的本能论

1. 本能论

本能论是弗洛伊德学说的重要组成部分，也是他的人格理论动力学基础. 弗洛伊德认为本能是人的生命和生活中的基本要求、原始冲动和内驱力. 本能主要有四个特点：①本能的根源性，即任何本能均源于人体内部的需要或冲动，将体内的能量释放出来. ②本能的目的性，即消除某种本能刺激的根源，以满足体内的需要状态. ③本能的对象性，即本能行为为达到目的所利用的对象以及所采用的手段. 本能的对象，可以是自身，也可以是其他物. ④本能的动力性，即本能总是具有某种数量和强度的力，其大小由本能拥有心理能量多少来决定. 美国早期著名的心理学家威廉·詹姆斯(Willian James)在他所著的《与教师谈心理学》书中有与动机关系最密切的是"习惯"这一章. 他说："根据你作出的每一个决心，根据你每一种情绪上的鼓励来理解你最初行动的可能性，你体验到的只是一种习惯的力量."因此，对于詹姆斯来说，动机是属于一种意志或决心的活动，而这种意志或决心的基础在于本能的习惯. 在心理学界被誉为教育心理学创始人的桑代克也认为行为的源泉是本能.

2. 驱力说

最早用内驱力这一词语的人是吴伟士(R. S. Woodworth, 1918)，但驱力说的闻名却应归功于赫尔(C. L. Hull). 吴伟士认为，人的活动包括内驱力和机制两个方面. 其中机制是指原因通向结果的历程，即刺激达到反应的关系. 它作为行为和外在方式和实现的途径，主要回答"怎么样"的问题. 在机制之外，必有推动机制的原动力，这就是内驱力. 内驱力是激发机制的内在条件，即行为的发动者. 它回答的是"为什么"的问题. 譬如陈省身院士，人生暮年回到南开讲学，这一个行动的内驱力是"把中国人不如外

国人的心理改过来”,让中国成为数学大国.

3 强化说

现代刺激反应理论家不仅用强化来解释操作学习的发生,而且也用强化来解释动机的引起. 在强化论看来,过去受到强化的行为比没有受到强化的行为更有可能重复出现. 斯金纳等行为主义者认为,强化程式的变化对行为的形成有很大的影响. 在连续强化和间断强化两大类中,斯金纳认为,两者在抵抗不强化条件下的消退上有很大差异. 连续强化容易消退,间接强化则不容易消退. 在学习中受到强化(如得到好的分数,教师与家长的认可)的学生将会产生一些学习的动机,没有得到强化(如没有得到好的分数,教师、家长没有对他们的学习给予夸奖)的学生将不会产生学习动机. 因此,强化是行为的决定因素.

4. 成就动机论

在过去的 30 年中,成就动机的问题同样为许多研究者们所注目. 在该领域中,最初的研究来自默里(H. A. Murray)有关人类动机的假设. 默里及其同事考察了一系列人类动机,其中成就需要被认为是一种“普遍的需要”,即成就动机论. 他将其定义为“克服障碍、施展才能,力求尽快尽好地解决某一难题,从而来显示自己的成就”.

麦克勒伦提出“成就需要”一词. 他认为高的成就需要与企业家的行为有很大的相关. 成就需要高的人,行为方式通常更像成功的企业家. 他们喜欢对问题承担个人责任,能从完成一项任务中获得一种满足感. 在解决问题时,成就动机高的人毅力强,而且总是倾向于将自己的失败归因于努力不够而不是归因于任务太难或运气不佳. 总之,成就动机高的人希望获得成功,而当他们失败之后,会自我调节,总结经验,会加倍努力,直到成功.

阿特金森对麦克勒伦的成就需要理论进行了提炼和补充. 他指出,个人的成就动机分成两类:其一是力求成功的需要;其二是

避免失败的需要.他在研究中发现,某些人的动机中,避免失败的成分比力求成功的成分更多(这样的人被称为“避免失败者”),而另一些人的动机成分中力求成功的成分比避免失败的成分多一些(这样的人被称为“力求成功者”).避免失败者的一个重要特征是,他们倾向于选择非常容易或非常困难的任务.选择容易的任务可使他们免遭失败,或选择的任务极其困难,那么即使失败,也可找到适当的借口,从而可减少失败感.相反,力求成功者旨在获取成就,他们最有可能选择成功概率为50%的任务,因为这种选择能给他们提供最大的现实挑战.他们对完全不可能成功或稳操胜券的任务,动机水平反而下降.

5.马斯洛的需要层次论

人本主义心理学家马斯洛接受这样一种观点,即某些人类活动是由生物需要的满足驱动的.他认为,人有七种基本需要,这些需要从低级到高级排成一个层级,如图2-3-1所示,而较低级的需要在至少必须部分满足之后才能出现对高级需要满足的追求.他认为,在这些需要中,前四种是缺失性需要,它们对生理和心理的健康是很重要的,必须得到一定程度的满足,但一旦得到满足,由此而产生的动机就会消失.后三种需要是成长需要,它们很少得到完全的满足.马斯洛指出,行为主义者从动物学习研究中所作出的动机假设只能解释缺失性需要,而对一个正常健康的人来说,因这些需要已得到相当的满足,他们的行为是由不同类型的成长需要所决定的.

在马斯洛的理论中,人类最高级的需要是自我实现,他将其定义为“使每一件事都能得以实现的愿望.”自我实现的人不仅为自己、他人所认可,而且心胸开阔、幽默、独立、具有创造性.马斯洛将这一需要放在层级的顶端以示这种最重要的需要的实现有赖于其他需要满足.

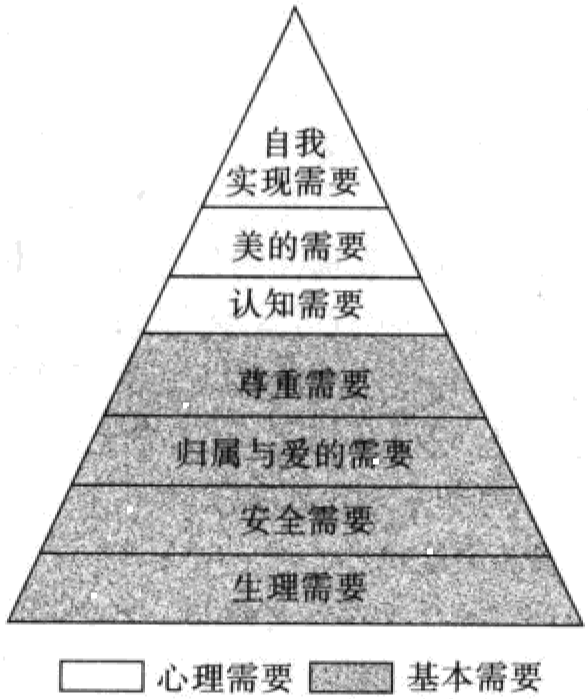


图 2－3－1

（采自 Maslow 1970）

6. **人格与人格动力说**

在行为心理学中，华生提出人格理论. 他认为人格乃是一切动作的总和，是我们所有的各种习惯系统的最后产物. 他还认为人格是可以改变的，人格的形成和人格的改变都依赖环境.

在精神心理学中，人格整体论是荣格分析心理学家的核心理论. 荣格把心灵作心理学的研究对象. 他认为心灵是一先在性的概念. 心灵，从本体看是一个实体；从现在存在看，是一个自律性的整体；从人类个体看，是一个整体人格. 在荣格看来心灵或人格总是由意识（自我）、个体潜意识（情绪）和集体潜意识（原型）三个层次组成. 如图 2－3－2.

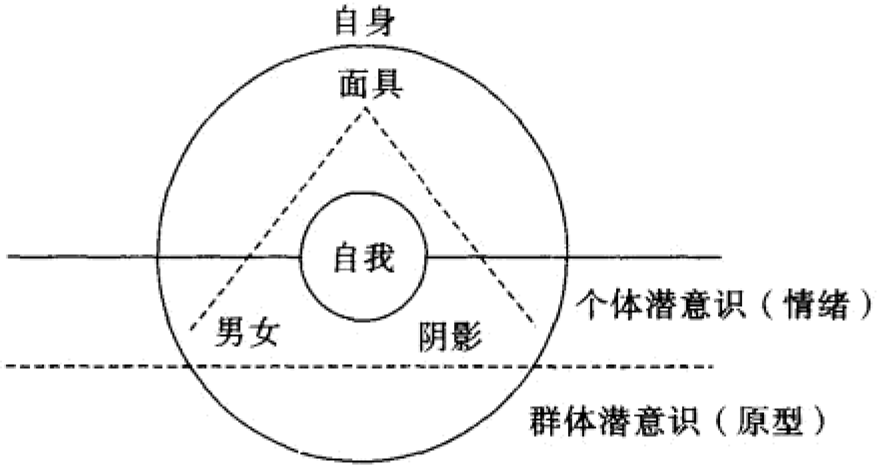


图2－3－2

荣格认为,人格动力推动人格的发展.荣格人格类型中的集体潜意识,是人格和心灵结构最底层的潜意识部分,是生物进化和文化历史发展过程所获得的心理上的沉淀物,是祖先在世世代代的活动方式和经验储存在人的头脑中的遗物痕迹.比如在历史的长河中,有不少的领袖、科学家、英雄等可以作为人格的榜样.以人格的榜样作为自己的人格动力,学着他们的模样去奋斗、工作、奉献,去自我实现,完善自己的人格.

7.兴趣

布伦塔诺(1838～1971)把意动分为三类,其中一类为兴趣(或爱憎运动),包括感情、希望、决心、意向和欲望等.他把感情和意志并为一类,在他看来,认识活动,尤其是观念活动乃是全部心理活动的基础,而感情、意志、欲望则是心理活动的动力.也就是把兴趣作为心理活动的动力.以兴趣为动力的例子很多,如菲尔茨奖得主丘成桐就是把数学学习当作兴趣的.

二、学习动机和学习的关系

学习动机是直接推动学生学习的一种内部动力.学习动机和学习的关系主要表现为一种间接的促进或促退的关系.毛泽东曾说过:"人总是需要一点精神的."还说:"先进的思想一旦被人们掌握,就会变成改造社会、改造世界的物质力量."这里面强调了人的内在动力的作用.学习动机是学习活动顺利进行的重要支持性条件.

1.学习动机在学习中的一般性作用

学习动机对于人类的学习可以发挥明显的推动作用.要达到有效地进行长期的有意义的学习,动机是必不可少的.例如,对于数学的学习,需要个体不断地作出积极的努力,把新的概念、原理组合到自己原有的知识体系内,要求个体具有集中注意力、坚持不懈以及提高对挫折的忍受性等良好的意志与情感方面的品质.我们可以设想,要一个人去做一件自己毫无兴趣的事情,或对于一个毫无知识需要的学生来说,他们是很难持久努力学习的.所以,对于学校中进行的长期的、有意义的数学学习来说,首先要激发学生求知的需要.学习动机的激发与维持能大大促进学习.

动机对有意义数学学习的影响,一般来说并不是直接地卷入认知的相互作用过程之中,也不是通过同化机制发生作用,而是通过加强努力,集中注意和对学习的积极态度去影响认知和相互作用过程.动机对有意义数学学习所起的作用,是激励、鞭策作用,是唤起行动的作用;而不是代替行动的作用.

2.不同类型的动机作用于学习的比较

不同类型的学习动机对学习的影响作用不相同.德怀克(C. S. Dweck,1985)根据学习者所具有的学习动机的目标定向的差异,将其划分为掌握目标定向(mastering goal orientation)和成绩目标定向(performance goal orientation)两类.他指出,不同的学习

动机目标定向影响学生在学习活动中的行为表现和所采取的学习策略. 具备掌握目标定向的学生会以积极的态度去对待学习任务,有意识地监控自我对学习内容的理解和掌握程度,倾向于采纳精制和组织的认知策略,把新知识和先前知识联系起来. 而那些具有成绩目标定向的学生则会倾向于使用机械复述的策略,而不是针对问题进行思考和反省. 他们只关注最终成绩,而对正在进行的学习过程并不感兴趣.

3. 课堂中的主要学习动机分析

根据国内外的研究,学生课堂学习的主要动机集中反映在成就动机上. 所谓成就动机,前面已提到,是指个人愿意去做、去完成自认重要或有价值的工作,并力求达到完美地步的一种内在的推动力量. 简言之,即为追求成就、希望获得成就的动机.

成就动机主要由以下三个方面的内驱力构成:认知内驱力、自我激励、附属内驱力.

(1)认知内驱力　认知内驱力是一种掌握知识、技能和阐明、解决学业问题的需要. 即一种指向学习任务的动机,求知的欲望. 实验证明,这种内驱力主要是从好奇的倾向对于探究、操作、理解外界事物奥秘的欲望,以及为应付环境提出的有关心理因素中派生出来的众多问题等. 例如,用"圆规"画圆,用"细绳"和"钉子"作椭圆,使小学生感到兴趣和好奇.

然而,学生的这些好奇心与探究环境的倾向,最初只是潜在的动机力量. 这种潜在的因素要通过实践活动,并在实践活动中不断取得成功才能逐渐形成和稳固下来. 例如,学生对某门学科如数学的认知内驱力或兴趣,绝不是生来就有的,而是在学习过程中,由于多次获得成功,体验到满足需要的乐趣,逐渐巩固了最初的求知欲,从而形成了一种比较稳固的学习动机.

认知内驱力既与学习目的性有关,也与认知兴趣有关. 因为当一个人清晰地意识到自己的学习活动与所要达到的目标的关

系，并以它来推动自己的学习时，这种学习的目的就成为一种有力的动机. 具有认知兴趣或求知欲强烈的人常常会废寝忘食、津津有味地去学习，并从中获得很大的满足.

在课堂学习过程中，学生成功的学习经验又会使他们期望在随后的学习中获得进一步的满足，并反过来进一步唤醒和激发动机. 由此可见，认知内驱力与学习之间的关系，乃是互惠的. 认知内驱力对学习起推动作用，学习又转而增强认知内驱力.

由于这种动机指向学习任务本身（为了获得知识），满足这种动机的奖励（实际获得知识）是由于学习本身提供的，因而也被称为内部学习动机. 当前，教育家和第一线的教师越来越认识到且十分重视内部动机的作用，越来越强调激发学生进一步学习的动机.

（2）自我提高的内驱力　自我提高的内驱力是指个体因自己的胜任能力或工作能力而赢得相应地位的需要. 这种需要是由人的基本需要——尊重和自我提高的需要所派生出来的. 自我提高的内驱力，对日后学习的重要作用，成为成就动机的主要成分.

自我提高的内驱力既可促使学生把自己的行为指向当时学业上可能达到的成就，又可促进学生在这一成就基础上把自己的行为指向今后在学术和职业方面的目标. 由于某人的数学成绩显著，受到表扬，赢得同学们的羡慕等，这还可进一步提高他的积极性，为夺得更大成绩而努力.

自我提高的内驱力与认知内驱力不一样. 它并非直接指向学习任务本身，而是把一定成就看作赢得一定地位和自尊心的根源. 因为一个人赢得的地位通常是与他的成就水平或能力水平相称的. 成就的大小决定着他所赢得地位的高低，同时又决定着自尊需要满足与否. 它显然是一种外部动机. 在课堂学习中认知内驱力（内部动机）固然重要，但适当激发学生自我提高的动机（外部动机）也是必要的. 譬如，学校教育中通常采用评“三好学生”、

评“优秀干部”的方式，或用学习反馈，以物质与精神奖励的方式引发学生的动机，以此激起他们的学习热情. 但是，不可走向极端，尽可能不让学生在学业上屡遭失败. 如果考试一直得低分，学生便会产生焦虑，从而严重伤害学生的自尊心. 经常失败的体验还会导致志向水平的降低，最终将引起回避和退缩反应，以致丧失学习的信心. 在自我内驱力的引导方面，应提高自我内驱力的层次. 荣格的人格动力学认为，正是人格的动力推动人格发展. 那么就应该选定自己的人格目标，把人格目标作为自我内驱力，如把“四有人才”、“有益于国家和人民”的人作为目标，把牛顿、丘成桐那样的人作为目标. 教师要向学生介绍一些数学家、科学家的事迹和人格，讲述国家建设的形势与青年人的责任，使学生认识自己肩负的历史使命和人格目标，使之为其人格目标，奋斗不息，以达到人格各方面的完善与和谐，并完成自己的自我实现.

(3)附属内驱力　附属内驱力是指一个人想获得自己所附属的长者(如家长、教师)的赞许和认可，取得应有的赏识的欲望. 也就是说，学生努力求得学业成就，并不是把这种成就看作赢得地位的手段，而是为了从长者那里得到赞许或认可. 之所以会产生这种动机是因为:第一，学生与长者(父母、教师)在感情上具有一定的依附性，长者是学生追随和效法的榜样;第二，学生从长者那里博得赞许或认可，会获得一种派生的地位，如赢得别人的羡慕等.

研究表明，具有高度附属感的学生，一旦得到长者的肯定或表扬，会进一步努力学习，并取得良好的成绩. 反之，他们的学习积极性就会下降.

成就动机中的三个组成部分——认知内驱力、自我提高内驱力和附属内驱力在动机结构中所占的比重，通常随着年龄、性别、人格结构、社会地位、文化背景等因素的变化而变化. 在儿童早期，附属内驱力最为突出，到了儿童后期和青年期，附属内驱力不

仅在强度上有所减弱，而且开始从父母转向同龄伙伴. 在这期间，来自同伴的赞许就成为一个强有力的动机因素.

§3　学习动机的激发和维持

一、唤醒需要，激发求知欲

1. 唤醒与学习

个体需要未得到满足时，就处于唤醒状态. 心理学家认为此时学习者是清醒的、警觉的，其神经系统处于激活状态，对于即将出现的刺激有一种加工的准备倾向，这时保证心智活动的效率是非常必要的. 耶克斯和多德森（R. M. Yerkes & J. D. Dodson，1908）提出唤醒水平和活动成效间的倒 U 型关系，即唤醒水平过高或过低都不利于解决问题，而以中等程度的唤醒为最佳. 唤醒水平与活动有效关系还与所要完成的任务性质有关.

适度的唤醒是保证学习效率的基本前提. 因此，教师应了解学生的身心状态，并利用各种因素来控制学生唤醒水平. 首先，教师可利用各种环境因素来唤醒学生做好学习准备. 其次，教师通过向学生显示需要对象和学习活动间的联系来激发学习动机. 譬如让学生认清在国家建设和知识经济的形势下，认准自己的任务与使命，激发学生的学习兴趣和求知欲.

2. 激发学习兴趣和求知欲

（1）创设问题情境，激发学生求知欲　创设问题情境就是在讲授内容和学生求知心理间制造的一种“不协调”，将学生引入一种与问题有关的情境中. 创设问题情境时应注意问题要小而具体、新颖有趣、有适当的难度，有启发性，善于将所要解决的课题寓于学生实际掌握的知识基础之中，造成心理上的悬念. 譬如在“平面内到两定点距离之和为定值的动点的集合”是椭圆，那么

"到两定点距离之差为定值的动点轨迹"是什么？以此激起学生的兴趣.

(2)丰富材料呈现法　通过采用图画、幻灯、录像、报告会、实验演示、参观考察等多种方式来培养学生对学习内容的浓厚兴趣. 教师也可以通过使学生参与学习活动过程来达到以上目的.

(3)利用学习动机的迁移　在学生尚没有明确的学习目的，对学习缺乏动力的时候，教师可利用学生动机的迁移，因势利导地把学生已有的对其他活动的兴趣转移到数学学习上来. 利用动机迁移原理时，教师必须要让学生感受到充分理解原有活动对于学好即将要学习内容的意义，从而激发学生学习新知识的强烈动机.

二、焦虑的调节

1. 焦虑对学习的影响

焦虑是一种心理现象，弗洛伊德精神分析心理学认为它是一种遇到刺激或挫折时，表现出的不安、担忧和紧张感. 弗洛伊德还将其分为早期焦虑和后期焦虑. 其原因在于害怕失败，担心不能完成任务以致随之而来的自尊的丧失.

焦虑对学习的影响与学习活动的性质有关. 对简单、练习性的任务，一定程度的焦虑水平具有促进作用，但对复杂、新颖需付出心智努力的任务，高焦虑就会产生妨碍作用. 有国外学者在1985年提出焦虑对学习活动产生的三种危害作用：一是产生注意力分散，影响对有关信息的掌握；二是影响学习策略的有效运用；三是妨碍考试策略的运用，对已掌握的内容也不能回答. 柯维顿(M. Covington，1992)对这三种危害作用产生的阶段作了分析. 第一阶段是判断，在考试开始时学生首先判断是挑战还是威胁，如判断为威胁便产生焦虑，导致注意力分散，学生开始关注活动成败，怀疑自己能力水平，担心能否达到预期目标等等. 因而对新信

息的接收和理解都受到影响，并影响到对题目的理解. 第二阶段是学习和解题阶段，由于同样的原因，学生关注是否有效地解决问题而不是如何去解决问题，不能很好地使用学习策略，尤其对零散的材料的组织和难度较大材料的理解，以及从记忆库中提取相关信息解决当前问题方面受到极大干扰，同时开始考虑建立不合理的目标或干脆拖延，结果更加影响学习的有效性. 最后一个阶段是回答问题阶段，由于焦虑使学生对于他已掌握的内容无法提取，原本能够解答的问题也无法解答. 教学中教师认真关注学生表现出的焦虑现象，并给予适度调控，对于学生的数学学习是有益的.

2. 防止焦虑

在如何使学生避免焦虑方面，教师应注意以下几个方面：

第一是教学方面. ①应给予清晰的教学，使学习的内容有明确的结构，即让学生感到教学的内容是明晰而具体的. 往往是教师的教学内容越含糊，学生对考试就越紧张. ②作业、测验、考试的时间、内容安排适当，平时作业和一般测验最好不要有太紧的时间限制并允许在上交前修正遗漏和错误. ③教育学生形成正确的考试态度，掌握若干考试策略. 如提高对考试意义的认识、考试时间的安排、检查策略的运用等等.

第二是人本主义关怀方面. 帮助学生总结经验，正视现实，树立自信心，对不同性格的学生，给予不同的指导. 让学生相信成功靠自己努力奋斗，自我实现.

三、动机的自我调控

学习动机的一个重要影响因素是期望，即对自己能否完成这一任务的预期，但在学习过程中，动机会受到许多干扰，需要人们对于动机的自控.

1. **自省和调节**

关于知识建构的心理机制是皮亚杰发生认识论研究的主要内容. 皮亚杰认为有两种心理机制:反省抽象和自我调节. ①反省抽象是指先行阶段的动作结构和运算结构在高一层次上进行新的组合,从而把它整合到更高水平的较丰富的结构之中,如在知识认知中非欧几何对欧氏几何的整合. ②自我调节,使有机机体(学生)能改变自身的潜在能量. 笔者认为皮亚杰的反省抽象和自我调节也可移植到动机的自我调控之中.

2. **客观分析课业成败的原因,建立积极的自我能力信念**

(1)归因对学习的影响　威纳(B. Weiner,1979)提出的归因理论更为全面地分析了一个人对其活动成败原因的看法及这种看法对动机的影响. 威纳认为,学生对自己课业成败的原因主要归为:能力、努力、任务难度、机遇、他人帮助、情绪等,而所有这些因素可以归入三大维度:控制源(个人内部因素还是外部环境因素决定了一个人的成败);稳定性(这些因素是否可变);可控性(行为者能否控制这些因素). 见表 2 - 3 - 1.

表 2 - 3 - 1　威纳的归因模型

	内部(归因)		外部(归因)	
	稳定的	不稳定的	稳定的	不稳定的
可控的	平时的努力	对特定任务的努力;随知识技能而增长的能力观	通常他人(如老师)对我的帮助	这次工作我得到的帮助
不可控的	恒定不变的能力观	情绪、健康	任务难度	运气

威纳认为控制源主要与一个人的自尊有关.把成功归于内部因素则产生自豪,强化动机;反之把失败归于内部因素则减少自尊.稳定性与未来的期待有关,把成败归于稳定的因素(如难度),则会预期同样难度上的成败,而归于不稳定因素(如运气、情绪等),则会因预期成败引起情绪发生变化.可控性与体验有关,把成功归于不可控因素则产生幸运或感激,把失败归于可控因素则产生羞辱和负罪感,归于不可控因素则产生愤怒.威纳发现在不同情境中学生对成败有不同归因,并对其后继行为产生巨大的动机作用,尤其是否将成败归于能力和努力这两个内部因素最为关键.长期归因于能力将形成个体自我有效感,而自我有效感一旦形成又反过来影响对某一具体活动成败的归因.追求成功的学生则倾向于认为他们基本能够控制自己的学习活动,因而认为能力不是成败的主要因素,成败主要与努力的质量有关,他们把成功归于努力与能力,把失败则归因于缺乏适当的努力.这样成功便是有能力的标志,而失败则是需要加倍努力的信号,失败不构成威胁.而力求避免失败的学生把失败归于能力缺乏,成功归于外部因素(如运气、容易等),无论成败都不会激励其进一步努力,如果学习者长期把学业的失败归于稳定不变的不可控制的内部因素的能力缺乏,其结果使他们产生了这样一种信念:无论怎么努力都不能避免失败的结果,并由此产生沮丧、无助和冷漠,不仅不去积极寻求成功,甚至不去避免失败.这些学生在课堂活动中既不以掌握为目标,也不以成绩为目标,而是以如何敷衍、应付老师、打发时间为目标,或者把目标转向其他活动,甚至产生反社会的行为.

(2)影响学生归因的因素　柯维顿提出"自我价值"理论来分析学生的归因倾向,主张动机的关键因素是试图维护对自己能力的肯定性知觉,这是自尊的基础.如果个体在任务中失败,反馈就会显示其可能缺乏能力,失败也会产生无足轻重和自我否定的

情感体验.其结果是个体在面临可能失败的时候,就会尽可能避免这种情境或避免做出缺乏能力的推理,通过不努力、或者假装努力而多方面寻求解释失败借口的方式来掩盖自己的真实感受.因此教师应尽力防止学生做出这种归因,合理把握对努力的强化程度.格雷汉姆(S. Graham,1991)等研究表明,如果教师对学生的错误表示不适当的同情、遗憾,学生很可能把失败归之于缺乏能力,在这种情况下批评反而是恰当的.只有在学生把失败归之于外部不可控因素(如问题难度等)的时候,教师才应给予同情、鼓励.另一方面,如果教师对学生的努力进行额外的表扬或学生提出要求之前就给予帮助,也可能被视为缺乏能力.艾米斯(R. Ames,1990)指出,当学生已尽了最大努力之后,如果教师还向他们指出这样的努力不足以解决问题时,学生很可能把失败归之于能力缺乏.还有,如果教师过于强调持续的刻苦努力对于完成一项任务的重要性,也会使学生认为它难以达到目标从而导致放弃努力.

教师除了帮助学生分析课业失败的合理原因之外,还应培养其对能力的信念,不断使其体验到因具备能力而导致成功的喜悦,强调努力带来的成功同时也是能力的体现.因为能力具有长期稳定性,因此能力对激发动机更为重要.对于已经形成自我有效感的学生,除用"勤能补拙"的道理激发其学习动机之外,更要让其在不断的成功中改变其"拙"的观念,切不可反其道而行之,使学生陷入"习得性无助"的境地,变成接受失败者.

三、教师对学生学习动机的维持

影响学生学习动机的因素,来自两方面:一是个体内部,另一方面是个体外部.影响学生学习动机的外部条件有:家长、老师、亲友等.从学校教育的角度看,为维持学生的学习动机,应从教学方法和教育方法两个方面进行改进探讨.

1. **知识教学组织**

(1)培养学生的学习兴趣　教师安排给学生的学业任务会直接影响到他的学习动机.学业任务首先必须是对学生有价值的.如果学业任务对学生没有任何价值,他自然就不会去学习它.艾克尔斯(J. Eccles,1925)根据学业任务满足学生需要的不同区分了任务的不同价值:一是内部价值,即兴趣价值,学习活动本身就带来了快乐;二是获得性价值,学业获得成功(取得好成绩)是有能力(聪明)的标志,而完成这一任务可取得好的成绩;三是利用性价值,即完成这一学习任务可使我们达到其他目标,如评奖学金、谋取职业等.任务价值不同,学生的学习动机自然有所差异.

(2)控制任务的可操作性、风险性和清晰性　道尔(W. Doyle,1986)认为学业任务依其对操作的要求,可分为四大类:一是记忆性的任务,要求学生再认或回忆学过的信息,如背一个定理和公式;二是程序性任务,要求学生用一个规定的程式解决问题,知道步骤就能得到答案,如用 πr^2 求得圆面积;三是理解性任务,要求学生转换信息,选择最佳方案,用多种方法解决一个问题或用特定的方式写一篇文章等;四是评价性任务,板演之后"$X < 0$ 时 $Y = X + \frac{1}{X}$ 的最小值是 2"此题答案正确吗?若不正确原因在何处?评价性和理解性的任务是含糊的,因此很难直接预料正确的答案是什么,而记忆和程序性任务则是直接而清晰的.

多数学生都希望降低风险性和减少含糊程度,尤其对那些高焦虑和力求避免失败的学生.当教师希望学生学会思考和解决复杂问题时,则布置高风险和含糊的理解性任务,学生往往要求更多的指导,如要求教师举例、可供选用的公式及教材相关内容等,否则就去寻求他人帮助甚至丧失兴趣.此时教师如妥协,就会降低问题的风险性,增加清晰度,学生学习动机暂时性增加,但并不利于培养学生解决问题和批判思维的能力.教师应把握一定的平

衡，在努力提高教学的结构清晰性的同时，依据任务的可操作要求决定相适应的清晰性和风险度.

（3）控制任务的时间要求和难度　需要教师考虑的还有作业任务的难度和时间要求的平衡. 任务过难和过易都会损害学习动机，一般提倡中等难度，即适合学生能力的难度，而且应由易至难进行安排，这样既能让学生体验成功感，培养对能力的信心，又不至于太容易而对任务失去兴趣. 就时间而言，任务的安排最好近期可以完成，时间过长而又抽象的任务不能使学生和当前的活动产生直接联系，无法推动学习. 时间过紧则易产生焦虑，尤其是在考试的情境中. 如高中课本函数的“概念”，刚开始教师就让学生练习“$f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ 恒成立，$x\in\mathbf{R}$、$y\in\mathbf{R}$，①求 $f(0)$；②证明 $f(x+y)\geq f(x)\cdot f(y)$. 有一部分学生就会感到困难，并对自己的能力产生怀疑.

（4）课堂任务的多维度　罗森霍茨（S. J. Roseholtz，1984）把所有学生学习同样课本、做同样作业、使用单一成功标准的课堂称为单维度课堂，而把不同作业和任务分配给学生，采用不同成功标准的课堂称为多维度课堂. 显然在单维度课堂中容易产生比较，好的学生总是得到更多的益处. 多维度的课堂则因学生的作业任务不同，可使每个人都能获得成功感及发展能力的有效信念.

2. 教学方法的组织

（1）关于反馈与评价　学习反馈是指告知学生关于其学习活动的进展情况及所取得的成绩信息. 评价则是对这种进展及成绩的价值进行评判（肯定与否定），并给予相应的强化. 表扬与奖励、批评与惩罚、反馈与评价通常难以分割. 教师的任何反馈对学生来讲实质上都有评价的含义，而任何评价也都反馈了一定的关于学业情况的信息.

1）及时反馈　了解自己学习活动进展情况，本身就是一种巨

大的推动力量，会激发学生进一步学习的愿望. 及时反馈能帮助学生及时发现、纠正错误，调整学习的进度，使用合适的学习策略来完成学业任务.

2)表扬与批评并用　必须指出，在掌握目标导向的原则下和在一定的情形中，适度的批评和惩罚对促进学生学习是有效的. 但一般来说，表扬、鼓励、奖励要比批评、指责、惩罚更能有效地激发学习动机.

(2)课堂活动形式的多样化　在课堂上调动学生动机的活动形式很多. 课堂活动结构（在不同情境又称"课堂成就目标结构"或"课堂奖赏结构"）指在课堂学习中，对学生达到学习成就目标产生不同影响的基本人际关系. 在现实的课堂情境中，课堂活动结构存在三种形态，即竞争式学习、合作式学习和单干式学习.

明确了动机对学习的作用，采用适当的方法引发、维持动机，会对学习的效果产生积极的意义.

参考文献

1. 王申怀. 编写新教材中的一些感想. 数学通报，2004(7)

2. [美]贝尔. 数学精英. 徐源译. 北京：商务印书馆，1994

3. 张春兴，车文博著. 西方心理学史. 杭州：浙江教育出版社，1998

4. [美]鲍尔，E·R希尔加德. 学习论. 皮连生译. 上海：上海教育出版社，1987

5. 皮连生. 学与教的心理学. 上海：华东师范大学出版社，2003

6. [美]布卢姆著. 教育评价. 邱渊等译. 上海：华东师范大学出版社，1987

7. 陆炳炎，王建磐. 素质教育：教育的理想与目标. 上海：华东师范大学出版社，1999

8. 朱文芳. 将心理学应用于数学教育实践要注意的问题. 数学通报，

2005(6)

9. 王仲春等.数学思维与数学方法论.北京:北京高等教育出版社,1989

10. 顾泠源,易凌峰,聂必凯.寻找中间地带.上海:上海世纪出版集团.上海教育出版社,2003

11. 张奠宙,宋乃庆主编.数学教育概论.北京:高等教育出版社,2004

12. 张志淼.关于数学兴趣的有关问题的思考.数学通报,2004(7)

13. 华中师范学院教育系,河南师范大学教育系,甘肃师范大学教育系,湖南师范学院教育系,武汉师范学院教育研究会会编.教育学.北京:人民教育出版社,1982

第四章　认知学习的环境

毛泽东在《矛盾论》中说："外因是变化的条件，内因是变化的根据. 外因通过内因而起作用."学习者的认知学习，主体是内因，如学习动机、学习基础. 也存在学习的外因，外因包含学习者之外的一切：学校、家庭与社会、教师和家长、同学等. 本章着重谈教师和课堂等教学环境的创设.

§1　教师对于学生的认知学习

心理学家认为，教师要充当知识传播者、团体的领导者、模范公民、纪律的维护者和家长的代理人等各种角色. 那么数学学科教学是以传授和指导学生获取数学知识、技能、思想和方法，提高学生分析问题、解决问题的能力，增强学生的数学素质和个性品格的活动. 一名受学生欢迎和爱戴的好教师，可以为学生认知学习提供一个良好的条件.

一、传统教学中学生学习出现的现象

在传统的教学中，教师负责教，学生负责学，教师教的主体与学生学的主体没有达到很好的统一，在教学上形成教师对学生单向的"培养"活动，它表现为：①以教为中心，学生围绕教转. 教师

是知识的占有者和传授者，在求知的学生眼中，教师就是知识宝库，是活的教科书，是有学问的人，教师是课堂的主宰者，所谓的教学是单纯的将知识传授给学生．教学关系成为：老师讲，学生听、写、抄．在这样的课堂上，“双边活动”变成了“单边活动”，学生是被教会的，而不是自己学会的．②以教为基础，学生跟着教师学，复制教师讲授的内容，先教后学，教了再学，教支配、控制学，教学由共同体变成了单一体．学的独立性、独立品格的体现不够充分，最终成为遏制学的“力量”．③师道尊严，老师是长者，主宰者，教师把对教学的“严谨”变成对学生的“严厉”，忽视了学生情感，致使学生、教师对立．④教材中“难、偏、繁、旧”造成一部分学生对数学学习的恐惧和厌倦．⑤应试教育和其他形形色色的教育弊端，对数学学习的不利影响等等．总之，造成这一局面的因素很多，也来自各个方面．在这种局面下出现了学生的厌学现象；因学生负担太重，学生的身体素质下降；中途退学现象；由于学生精神压力过重，出现金华“子杀母”、青海“母亲打死儿子”的事件等，严重影响着数学学习的效果．总之，传统教学一定程度的存在着教与学两方面的机械叠加的现象．

在数学学习中的教学应当是教与学的交往、互动，师生双方相互交流、相互沟通、相互启发、相互补充，在这个过程中教师与学生分享彼此的思考、经验和知识，交流彼此的情感、体验与观念，丰富教学内容，求得新的发现，从而达成共识、共享、共进，实现教学相长和共同发展．但传统的数学教学未能完全朝着这个方向．

二、学生喜欢与不喜欢的教师特征调查

心理学家对教师的心理特征与其职业成就之间关系的早期研究大致可分问卷调查、相关研究和实验研究．

1. 国外的问卷调查结果

心理学工作者设计问卷，向学生做调查，了解他们喜欢与不喜欢的教师的特征，并对这些特征加以排序. 西方学者很早就开展了有效与无效教师特征的问卷调查，如有人曾在 1940 年向 47 000名学生作调查分析，归纳出有效与无效教师特征各 12 项(见表 2-4-1). 这是心理学中对教师心理特征与其职业成就之间关系的比较早期的研究.

2-4-1　有效与无效教师特征对照

有效教师特征	无效教师特征
1. 合作、民主	1. 脾气坏，无耐心
2. 仁慈	2. 不公平，偏爱
3. 能忍耐	3. 不愿帮助同学
4. 兴趣广泛	4. 狭隘，对学生要求不合理
5. 和蔼可亲	5. 抑郁、不和善
6. 公正	6. 讽刺、挖苦学生
7. 有幽默感	7. 外表讨厌
8. 言行稳定一致	8. 顽固
9. 有兴趣研究学生的问题	9. 啰唆不停
10. 处事有伸缩性	10. 言行霸道
11. 了解学生，给予鼓励	11. 骄矜自负
12. 精通教学技能	12. 无幽默感

1960 年还有人进行了类似的调查研究，分析整理出有效教师的特征有：机敏、热心；关心学生及班活动；愉快、乐观；能自我控制；有幽默感等 20 余项. 无效的教师特征有：呆滞、烦恼；对学生及班活动不感兴趣；不快、悲观；易发脾气；过分严肃等 20 余项.

日本学者上武正二、大竹诚和光安文夫等分别调查了中小学生数千人，排列出学生所喜欢的 19 种教师的心理特征(见表

2－4－2).

2－4－2 日本学生喜欢的教师特征

研究者 / 被研究者 / 特征 / 次序	上武正二	大竹诚	光安文夫
	小学一年级至高中三年级(45880名)	初中一年级至高中二年级(698名)	小学四年级至六年级(1567名)
1	教育热心	理解学生	教学方法好
2	教学易懂	亲切、平易近人	各方面都很热心
3	开朗	能信赖学生	平易近人
4	公开	公正	喜欢运动
5	理解学生	教得清楚	开朗快乐
6	亲切	开朗	公正
7	平易近人	感情真挚	脑子好
8	有趣	教育热心	知识丰富
9	不发脾气	守时,不懒惰	讲话对学生有益
10	幽默	活泼	照顾学生
11	直爽	教学有趣	兴趣广
12	与学生一起活动	知识丰富	有实力
13	活泼	责任心强	有钻研心
14	擅长活动	认真	亲切
15	多与同学讲话	教学水平高	整洁
16	有学问	一丝不苟	身体健康
17	言语明了	品格高尚	板书漂亮
18	健谈	有信仰	言语明了
19	疼爱学生	文雅	年轻

2. 国内的问卷调查结果

在国外研究的基础上,我国学者也作过类似的调查研究. 如

我国心理学工作者谢千秋曾以“学生喜欢怎样的教师”为题向42所中学(从初一到高二)91个班的4 415名学生作了问卷调查,归纳出学生喜欢和不喜欢的教师特征各10项(见表2-4-3).

表2-4-3　我国中学生喜欢和不喜欢的教师特征(%)

次序		教师特征	初一初二	初三	高一
			2026人	612人	1777人
喜欢	1	教学方法好	78	86	85
	2	知识广博,肯教人	71.9	90.8	88.1
	3	耐心温和,容易接近	75.6	78.5	77
	4	实事求是,严格要求学生	57.5	62.2	61.1
	5	热爱学生,尊重学生	59.5	58.6	53.7
	6	对人对事公平合理	52.4	42.8	44.4
	7	负责任,守信用	33.8	32.8	36.4
	8	说到做到	36	24	24.4
	9	有政治头脑,关心国家大事	18.2	13.4	16.2
	10	讲文明,守纪律	14.4	8.1	10.6
不喜欢	1	对学生不同情,把人看死	71.7	72.3	74.9
	2	经常责骂学生,讨厌学生	72.4	69.1	70.4
	3	教学方法枯燥无味	61.5	74.6	88.6
	4	偏爱,不公正	64.3	61.4	51.7
	5	上课拖堂,下课不理学生	67.8	57.3	57.3
	6	说话无次序,不易懂	48.9	56	53.5
	7	只听班干部反映情况	43.3	33	27.2
	8	不和学生打成一片	26.1	33.1	35.8
	9	布置作业太多,太难	28.3	19.3	17.8
	10	向家长告状	25.2	14.7	11.7

3. 对学生喜欢的教师特征的分析

上述资料涉及的年级多，被调查的学生面广，学生喜欢与不喜欢的教师品质所涉及的面也很广，排列次序也不很一致. 但据此也可以对学生所喜欢的教师的特征进行分析.

角色的原意是戏剧舞台上演员按剧本扮演的特定人物. 大多数社会心理学家认为，角色就是个体在特定的社会关系中的身份以及由此而规定的行为规范和行为模式的总和. 个体在特定的社会关系中的身份反映了个体在社会关系中所处的地位，它是个体的社会职能、权利和义务的集合体. 每种社会身份都伴随着特定的行为规范和行为模式，当个体产生为自己的社会具有身份所规定的行为规范和行为模式时，便充当了角色. 那么，教师在当今社会充当什么角色呢?

如果学生把教师看成是家长的代理人，认为教师具有仁慈、体谅、耐心、温和、亲切、易亲近等特征；如果学生把教师看成是知识的传授者，那么教师应该具有业务精、知识渊博、语言准确、幽默等特征；如果学生把教师看成团体领导者和纪律维护人，他们希望教师表现出公正、民主、合作、处事有伸缩性等特征；如果他们把教师看成是模范公民，则要求教师言行一致、幽默、开朗、直爽、守纪律等. 总之，如果要成为一名受学生欢迎和爱戴的好教师，不仅需要具有一般公民需要的良好品质，而且需要具备教师职业所需要的特殊品质.

三、波利亚论教师

(1)教师对自己讲的课题有兴趣；

(2)教师要熟识自己所讲的课题；

(3)要深刻理解和懂得教学规律和学习规律，让学生亲自、独立地发现知识的奥秘；

(4)注意学生的表情和现实经验，从中发现学生的期望和

困难；

(5)不仅教知识，而且教方法和培养有条不紊的习惯；

(6)让学生自己学会猜想；

(7)让学生自己学会证明；

(8)要帮助学生找出所学知识对今后有用的特征，从具体问题中找出一般规律性的东西(实践—理论—实践)；

(9)不要把秘密、答案一下子教给学生，让学生自己去探索、去发现；

(10)倡导启发式.

四、对新型的师生关系的构想

第一，教师要真情对待学生，关心爱护学生.要建立良好的师生情感关系，教师必须付出真情，关心爱护每一个学生(尖子生和学困生)，公平地对待学生，不能厚此薄彼，尤其是对学习成绩不够理想的学生，教师要多鼓励，多关怀，相信他们的潜力，切实帮助他们.我们相信，教师的真情投人，必定会得到学生的真情回报.

第二，展现教学过程的魅力，感受数学知识的价值，挖掘数学的奥秘，品味教学成功的喜悦.通过联系学生生活实际，激发学生学习兴趣，增强学生情感体验，改进教学活动，使教学过程充满情趣和活力.展现教学过程的魅力，提高教学活动的吸引力，优化师生情感关系，让学生“亲其师信其道”.

第三，完善个性，展现个人魅力.教师要得到学生的爱戴，就要有内在的人格魅力，努力完善自己的个性，使自己拥有热情、真诚、宽容、负责、幽默等优秀品质，这是优化教师情感关系的重要保证.为此，教师要自觉提高自身修养，扩展知识视野，提高敬业精神，提升教育艺术，努力成为富有个性魅力的人.

五、现代教学技术的使用

综观人类教育发展史,每一项新的教学技术的应用,都给教学活动提供了新的发展空间,使教学活动在整体上得到丰富和提升. 从某种意义上说,随着社会发展而不断更新教学设备、优化教学技术,是教学发展的历史规律和客观要求. 我们发展现代教学技术,应立足于教学发展的历史规律,深刻认识到教学技术更新对于教学活动整体进步的历史意义. 当前人类正在步入一个全新的技术发展时期,正如联合国教科文组织国际 21 世纪教育委员会所指出的:"新技术使人类进入了信息传播全球化的时代,它们消除了距离的障碍,正十分有效地参与塑造明天的社会.""这些新技术正在我们眼前引起一场真正的革命,这场革命既影响着与生产和工作有关的活动,又影响着与教学和培训有关的活动."的确,以个人电脑、网络技术和多媒体技术为主要内容的现代信息技术革命的出现,为教学方式与教学模式的变革提供了新的物质基础. 当前,世界各国都在研究如何充分利用信息技术提高教学质量和效益的问题,加强现代信息技术的教学应用已成为各国教学改革的重要方面.

基于这样的背景,《基础教育课程改革纲要》第 11 条明确提出:"大力推进信息技术在教学过程中的普遍应用."并对这种应用的立足点作了明确的阐述:"促进信息技术与学科课程的整合,逐步实现教学内容的呈现方式、学生的学习方式、教师的教学方式和师生互动方式的变革.""充分发挥信息技术的优势,为学生的学习和发展提供丰富多彩的教育环境和有力的学习工具."这就要求我们认识到现代信息技术具有巨大的作用. 因此我们要提倡以提高教学质量的效益为目的,以转变学生学习方式和促进学生发展为宗旨的教学技术应用观. 同时要本着从实际出发、因地制宜的原则,挖掘和发挥传统的种种技术手段(黑板、粉笔、挂图、

模型等传统教学工具)在教学中的积极作用,合理地使用录音机、幻灯机、放映机等传统的电化教学手段,当然,每种教学手段都有其局限性和使用范围.总之,所有教学技术手段都有自身的价值和存在的意义,我们发展现代教学技术,并不是要抛弃一切传统的教学技术,而是要把现代教学技术和传统的教学手段结合起来,努力挖掘所有教学技术手段的使用价值,积极促进各种技术手段之间的协同互补,从而促进教学技术体系整体协调发展,提高教师本身的业务素质、教学观、学生观和教学水平,为学生的数学学习创造一个良好的学习环境.

§2 教学方法

教学方法是教师为完成教学任务而采取的手段.借助教学方法,教师引导学生掌握知识,形成技能、技巧,并在这一过程中,发展学生的智力和体力.

对于数学这门学科,教学方法是培养和发展学生分析问题、解决问题的能力,培养学生的创新精神和科学态度;教学方法是数学学习的环境和条件.

一、学校常用的数学教学方法

1.讲授法

讲授法是教师通过语言系统地向学生传授知识的方法.

讲授法的特点是教师可以将数学科学知识系统连贯地传授给学生,使学生能在较短时间内获得较多的知识.针对数学教学讲授法分为:讲述法、讲解法和大型讲座法.

讲述法是教师向学生叙述事实材料,或描绘所讲对象.如在讲数学中的阅读材料、数学概念的引入,以及教学过程中穿插的数学家的故事等,都可以使用讲述法.教师在运用这种方法时,为

了使自己的讲述更富吸引力,可以穿插一些关于所讲述的事件的当事人的言论和故事.

讲解法是教师向学生说明、解释或论证原理、概念、公式.讲解法和讲述法的不同是:讲述是叙述、描绘事实;讲解是说明、解释事实和论证原理.讲解法在数学教学中,表现为定理的证明、问题的求解、模型的建构等.

大型讲座法是教师不仅描述事实,而且深入分析和论证事实,并在这个基础上,作出科学的结论.大型讲座与讲解、讲述不同的地方是,它所涉及的问题比较深广,所需要的时间比较长,适用于中学高年级和大学学生,要求学生做比较详细的笔记.

运用讲授法的基本要求是:

讲授的内容要具有科学性和思想性,这是保证讲授质量的首要条件.要做到这一点,必须按教学规律、课程标准的要求.观点去分析教材、叙述教材.讲授时注意观察学生并与学生实现互动,注意学生反馈的信息、讲授的效果.

讲授要有系统性,条理清楚,重点突出.讲授时,要注意由已知到未知;注意观点和材料的统一,做到逻辑缜密,层次分明;注意突出重点、难点和关键,使学生能够透彻理解,融会贯通.

讲授时要求数学语言清晰、简练、准确、生动,说话要通俗、快慢适度,注意语法规则,不用含糊的不准确的词句,不说半截子话,说话注意声调的抑扬顿挫,并注意运用普通话教学.教师平素要多注意练习,力求掌握课堂语言艺术.

讲授时要根据需要恰当地运用板书.教师的板书要工整、有计划、有条理、字迹清楚、正确.为了加强教学的直观性,教师还可以根据需要采用有色粉笔作简图或标明重要的内容,促使学生注意,实现视觉强化.

2. 谈话法

谈话法是教师根据自己已有的知识和经验,提问学生,并引

导学生对所提问题得出结论,从而获得知识的一种教学方法.谈话法在各年级和各学科的教学中是经常被采用的.它的作用是:有利于充分激发学生的思维活动,使学生通过独立思考来获取知识;对提高学生的语言表达能力,实现师生互动,有较好的效果.但是,运用谈话法,要求学生必须具备一定的知识基础和经验.

谈话法,可以用于各类课型.如讲授新课,一般是教师在叙述了一些有关的事实之后,便向学生提出问题,然后引导学生对有关事实进行分析,为提出的问题找出答案,作出结论.谈话法也可以用于复习和巩固旧知识等.

运用谈话法的基本要求是:

教师要有充分的准备.提问的问题要明确,要有启发性,要难易恰当,符合学生的水平;提问的对象,要普遍,对不同性质、不同程度的问题,要适当地让不同程度的学生回答;谈话要有计划性,要全面安排谈话的内容,拟出谈话提纲;谈话所需要的时间,要根据问题的多少、问题的难易、提问对象的程度来确定.

教师要按计划进行谈话.谈话时,要围绕谈话的题目、线索和关键问题进行.问题应向全班学生提出,但要尽可能避免学生齐声回答,力争准确地挖掘学生的反馈信息.

教师要启发学生积极地参加谈话,引导学生积极思考教师提出的问题,自觉地回答问题,并注意倾听其他同学的发言.必要时使学生之间进行交流,实现生生互动.对回答得特别好的同学要给以鼓励,以培养学生的自信心和兴趣.

谈话结束时,教师应当结合学生回答问题的内容,进行总结,对谈话过程中学生的优缺点及时反馈给学生.

3.演示法

演示法是教师在上课时,配合讲授或谈话,把实物、教具展示给学生,或者向学生作演示,甚至让学生自己动手,来说明或印证所传授的知识.这种方法,在各个年级的教学中都可采用.

它的作用是：能使学生获得感性的材料，加深对学习对象的印象，把理论、书本知识和实际事物联系起来，以帮助学生形成正确的概念，使学生习得的知识"活"起来；能引起学生的学习兴趣，集中学生的注意力，使学生学得的知识易于巩固.

运用演示法的基本要求是：

演示时，要使全班学生都能看到演示的对象，尽可能地让学生运用各种感官，去充分感知学习对象. 如果演示不仅能够让学生看到，而且让学生听到、摸到，那么，效果就会更好. 当然，这要从所演示的对象特点出发，在有的情况下，只需要学生用一种感官去参与知觉活动就行了.

要使学生注意观察演示的东西的主要特征和重要方面，不要使他们注意力分散到一些细枝末节上去. 要做到这一点，教师在演示时，应对演示对象加以必要的说明调动学生注意，告诉学生观察什么，注意什么，同时应提出一系列问题，把学生的注意力引导到他们必须进行观察的事物上去. 如欧拉公式：让学生去发现多面体的顶点(V)、面数(F)与棱数(E)的关系.

要尽可能地让学生观察被演示的事物的变化、发展和活动情况，这样才能使学生获得深刻完整的印象.

演示要适当. 应当在使用时才展示直观教具，过早地把教具拿出来，会分散学生的注意力，削弱新颖感，降低对它的兴趣. 教具用过后，应当及时收起来. 每堂课演示的教具不宜过多.

在演示时，要适当配合讲解或谈话，引导学生观察，并作出一个明确的结论来，切忌流于形式，追求形式上的热闹.

4. "读议讲练"法

"读议讲练"法原名是"读读、议议、讲讲、练练"，是 20 世纪 80 年代前后上海育才中学章淳立老师创造的. 作者认为此法教学效果不错，把讲授法、讲解法、演示法糅在一起，扬长避短，实在、实用、生动、有效.

读，让学生先看书（预习）；议，同学们之间议知识信息的认识、理解和疑点，实现生生互动；讲，针对学生提出的共性问题、典型问题、独特见解、含混不清之处等，有选择的给以辨析、讲解，使学生准确地理解知识，建立自己的认知结构实现师生互动；练，在此基础上，让学生动手去练习，去验证自己的理解，巩固自己的知识结构. 读、议、讲、练各个环节的活动都是在上一个环节基础上开展的.

"读议讲练"法的基本要求：

"读"（或预习），教师要先给出提纲，要求学生通过"读"，关注问题的要点；"议"在读的基础上通过议，使学生之间开展交流，由此让学生自己解决阅读中遗留的问题；"讲"也可教师讲，也可让优秀学生讲大家共性的疑难、模糊处，并适当地居高临下地给以讲解，帮助学生建立自己的认知结构；"练"选择适当的针对性强的问题，切忌搞题海战术.

笔者认为，在"读议讲练"的基础上，续上一个"思". 让学生去"思"，要求从知识的建构上，方法的收获上，记忆内容的选定上，重点难点、解决手段的选择上等，使各类学生都有所得.

5. 发现法

发现法又叫问题法，就是让学生去发现，回答他们自己的疑问，解决他们自己的问题. 采用这种教学方法的目的，在于尽量地发展学生认知的可能性，发展他们对需要掌握知识的探讨和创造精神.

发现法的积极倡导是美国心理学家布鲁纳，他在《发现的行为》一文中，对这种学习方法作过详细的描述. 他指出："发现不限于寻求人类尚未知晓的事物，确切地说，它包括用自己的头脑去获得知识的一切方法."（载 J. M. 安吉林编：《布鲁纳关于认识心理学的研究》1973 年纽约英文版）布鲁纳认为，发现无论是由一个学生独自摸索出来的，还是由一位科学家在他那个领域的最前

哨里栽培出来的,本质上都是重新整理和改造证据,达到新的洞察力.所以,从教学方法的角度看,学生在教师的启发诱导下,能够借助教师亲自去探索,主动去发现和概括出应有的基本原理等规律性知识,获得人类已有的认识成果和社会生活经验,在教学效果上比死记硬背一些现成的概念和结论,被动地接受知识好得多.

运用发现法的一般步骤是:

(1)创设问题的情境,使学生在这种情境中产生矛盾,提出要求解决或必须解决的问题;

(2)学生利用教师和教材所提供的某些材料,对提出的问题作出解答的假设;

(3)从理论上或实践上检验自己的假设,学生中如有不同的观点,可以展开争论;

(4)对争论作出总结,得出必要的结论.

教学实践表明,这种教学方法具有以下的优点:能充分发挥学生认识的积极性和创造精神,使学生认识活动的内部过程经常伴有猜想、惊讶、困惑,以至于感到棘手、紧张而陷入沉思、期待,促使他们去寻找理由和证明.它能使学生产生成就感,激发学生的学习兴趣,培养和养成学生独创精神、创造意识和科学态度,促进学生的学习品质的提高,但这种教学法需要花费很多时间,不利于学生掌握系统的知识.

运用发现法的要求是:

鼓励学生,使他们相信自己能够解决问题,能够通过证据获得正确的结论,让学生对所研究的问题发生内在的兴趣;

帮助学生找出他们正在研究的问题和他们已经知道的事物之间的联系,指导学生如何对比事物,如何思考问题,促成学生的发现;

要帮助学生找出结论,建立认知结构.

6. **启发式**

启发式教学思想是孔子在世界教育史上最早提出的. 孔子说:“不愤不悱,不启不发.”孔子认为,任何学习过程都要建立在学生自觉需要的基础上,应充分调动学生的主动性和积极性. 学生自己要会对问题思考,获得切实的领会,这样获得知识才是可靠和有效的. 所以,要帮助学生形成遇事思考的习惯,培养其善于独立思考的能力,提倡启发式教学. “启发式”后来传到了外国.

启发式有设置悬念的,有引而不发的,有分步置疑的等. 切忌事先把答案告诉给学生和老师代替等. 启发式也是一种教学思想,鼓励学生自己去创造,去解决问题.

7. **程序教学**

程序教学是一种个体自学的方式. 学生独立钻研经过特别改编的程序化的教材,既要动脑又要动手,还要根据各自的学习能力、水平,调整自己的学习速度,边读边练,不仅可以及时强化学生正确的反应,而且促进他们主动积极地去获得知识和技能,提高他们的自学能力.

程序教育发源于美国. 1926 年普莱西就设计了一种进行自动教学的机器. 后来,许多国家都开展了对于程序教学的研究和实验.

程序教学如今名目繁多. ①直线式程序是美国人斯金纳首创的. 这种程序把学习材料分成许多连续的步子,每一个步子就是一个框面,要学生按照同一顺序作答,然后过渡到下一步子的框面;在下一步的框面的左侧印上前一框面的答案,前一框面的答案自然就成为本框面的一种提示,如此循序前进. 直线式程序的模式是:

$$①\to②\to③\to④\to⑤\to\cdots\cdots$$

②分支式程序是由美国人克洛德首创的. 这种程序采取多重选择反应,以适应个别差异的需要. 学生在阅读一个单元教材之后,立

刻用这个单元的材料对他进行测验. 测验题有几个选择答案，包括正确的和不正确的(这些不正确的答案是学生经常可能出现的错误)，都让学生自己选择. 如果选对了，表明他学会了这个单元的教材内容，那么就引进新的内容继续学习下去；如果选错了，则表明他还不懂这单元的教材内容，便引向一个适宜的单元，澄清他所产生错误的原因之后，再继续学习下去，或者回到先前的单元，再学习一遍，然后再引进新内容的学习. 分支程序的模式见图2-4-1.

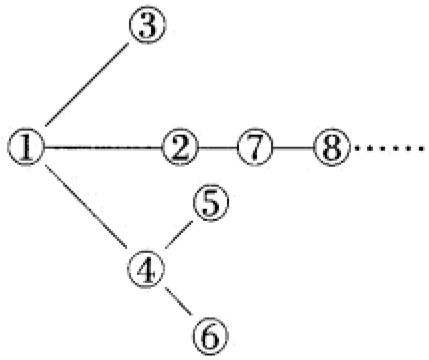


图2-4-1

分支程序中一般有主支和分支，如图的①②⑦⑧为主支，③④为分支；分支又可分为亚分支，如图的⑤⑥.

分支式的程序通过学生的选择，走向不同的支线，以适应个别差异的需要. 选择完全正确的学生一直沿主支前进，学习进度就快；选择不正确的学生，走向分支，如果有的学生欠缺这方面的基本知识，又要进入亚分支，待复习这部分基本知识之后，才能回到主支继续学习下去. 这种方法适于运用网上学习或有关知识的软件在电脑上学习，所以采用分支式程序教学时，同一班级的学生，由于各人的水平不同，在学习速度上的差别是很大的. 前面说的"读议讲练"法，某种意义上就是程序教学的应用和发展.

二、关于教学评价

数学教学评价是数学教育的子系统. 数学教学评价具备以下功能：导向功能、调控功能、激励功能、定性和定量功能等. 因为教学评价的功能，自然成为影响学生数学学习的一个重要因素.

为了更好地促进学生的数学学习，教育学提出了教育评价的四个原则：①目的性原则，学科评价必须有明确目的；②教育性原则，教育是全方位的教育，评价应体现知识的学习、能力的培养、技能的训练、思想方法的发现和运用及学习态度、动机、目的的教育和学生个性品质的培养；③科学性原则，培养学生的科学学习精神，端正学生的学习态度；④可行性原则，评价切实可行. 因此在布卢姆《教育评价》一书中和皮连生教授在《教与学的心理学》都说到评价的定量与定性问题，"信度、效度、难度、容度"的问题. 这些是需要认真去研究挖掘的.

参考文献

1. 皮连生. 学与教的心理学. 上海：华东师范大学出版社，2003

2. [美]G·H鲍尔，E·R希尔加德著. 学习论. 邵瑞玲，皮连生译. 上海：上海教育出版社，1987

3. 朱文芳. 将心理学应用于数学教育实践要注意的问题. 教育通报，2005(6)

4. 张顺燕. 数学教育与数学文化. 数学通报，2005(1)

5. [美]美国国家研究会. 人人关心数学教育的未来. 世界图书出版公司，1993

6. 周春荔，张景斌. 数学学科教育学. 北京：首都师范大学出版社，2003

7. 张奠宙，宗乃庆主编. 数学教育概论. 北京：高等教育出版社，2004

8. [美]B·S布卢姆著. 教育评价. 邱渊等译. 上海：华东师范大学出版

社,1987

9. 张春兴,车文博著. 西方心理学史. 杭州:浙江教育出版社,1998

10. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

11. 华中师范学院教育系,河南师范大学教育系,甘肃师范大学教育系,湖南师范学院教育系,武汉师范学院教育研究会会编. 教育学. 北京:人民教育出版社,1982

第三部分　数学思想方法

第一章　数学思想方法与数学学习

自人类在蒙昧时代，原始的“数觉”抽象和数的概念的形成经过漫长的时期．直到公元前600～300年，数学开始作为一门有组织的、理性的、独立的学科存在．至今数学像一株茂密的大树，已有了并且继续生长着越来越多的分支．随着人类社会文明的发展和需要，人们把数学看作是一切科学的语言；数学是一把打开科学大门的钥匙；数学是一种思维的工具；数学是一门创造的艺术．数学渐渐地被视为与自然科学、社会科学平行的科学．正像王梓坤先生在《今日数学及其应用》一文中指出的那样：“数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高新技术）水平的推进和提高，对于科技人才的培养和滋润，对于经济建设的繁荣，对于全体人民科学思维的提高和文化素养的哺育．”数学已成为现代社会的文化，数学观念正在影响着人们的生活和工作．

数学思想方法的研究始自20世纪40年代，数学家波利亚著有《怎样解题》，20世纪80年代徐利治教授在大学数学系开设“数学方法论”，著有《数学方法论选讲》．自此，数学思想方法的研究不断深入．关于数学思想方法，北京师范大学钱佩玲教授指

出:“数学思想方法是以数学内容为载体,基于数学知识,又高于数学知识的一种隐性知识.”“是处理数学问题的指导思想和基本策略,是数学的灵魂.”数学思想方法的研究,大多从不同角度组织内容,力图建立一个体系.

数学思想方法是一种指导思想和普遍适用的方法.数学本身作为一种科学,具有严谨性、逻辑性、简捷性、可靠性等特点.对数学思想方法的研究,有益于数学本身的研究,同时,数学是一种文化,是一种态度.人们在领悟数学的真谛,懂得数学的内涵和价值之后,形成一种素养,学会数学地思考和解决问题,去延伸数学中“人人平等”的精神和辩证唯物主义态度等.

§1 数学思想方法

一、“数学思想方法”的解释

“数学思想方法”一词,自20世纪90年代以来,在数学、数学教育范围内开始使用,使用率在增高.在其他学科内也有使用.数学思想方法贯穿在《数学课程标准》(实验)中:①把它作为教育的目标,在前言中要求教师“应激发学生的积极性”,帮助学生在学习的过程中真正理解和掌握基本的数学知识和技能、数学思想方法;②把它作为学生学习的目标,“通过义务教育阶段的数学学习,学生能够获得适应未来生活和进一步发展所必需的重要的知识(包括数学事实、数学活动经验)以及基本的数学思想方法和必要的应用技能”等.

那么“数学思想方法”是什么?对此学者们有不同的解读.

有一种观点认为:“数学思想方法是一个理论问题,有狭义和广义两种理解.狭义的理解认为是数学本身的论证、运算及其运用手段;广义的理解认为,除上述内容以外,还应包括关于数学概

念、理论、方法以及形态的产生与发展规律的认识.”

另一种观点认为:目前数学思想方法不像数学中的概念那样明确地给出定义,只能给出一种解释和界点. 钱佩玲教授在《数学思想方法与中学数学》中指出:“所谓数学思想是对数学知识的本质认识,是从某些具体的教学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点,它在认识活动中被反复运用,带有普遍的指导意义,是建立数学和用数学解决问题的指导思想.”如模型思想、极限思想、统计思想、最优思想、化归思想等. 数学方法是指在提出问题、解决问题(包括数学内容问题和实际问题)过程中,所采用的各种方式、手段、途径等. 上述两种提法从不同角度对数学思想方法进行解读和思索,在教学实践中,后者更贴近及具有普通意义. 根据数学家的研究,数学思想方法有下述特征:

(1)数学思想和数学方法是紧密联系的,一般来说,强调指导思想时称数学思想,强调操作过程时称数学方法.

如:思想方法中的“化归”,我们在思考过程中,把要“解决的问题”转化为“已知的问题”或“能够解决的问题”,这就是“化归思想”. 在解决问题的实践中,具体使用不同的途径和方法,叫“化归方法”.

例(3-1-1) 在 xoy 平面上,已知三直线:

$L_1: x\cos 3\alpha + y\cos\alpha = a$

$L_2: x\cos 3\beta + y\cos\beta = a$

$L_3: x\cos 3\gamma + y\cos\gamma = a$

相交于一点(交点不在 x 轴上),求证: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$.

证明:将3倍角化为单角,设 L_1、L_2、L_3 交点为 (x_0, y_0),

则有 $x_o(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + y_o\cos\alpha = a$ ①

$x_o(4\cos^3\beta - 3\cos\beta) + y_o\cos\beta = a$ ①

$x_o(4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma) + y_o\cos\gamma = a$ ③

上述三个方程结构相同,只是角度 α、β、γ 不同,由方程解定

义，可视 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为三次方程

$$x_o(4t^3-3t)+y_o t=a \text{ 的解,}$$

即 $4x_o t^3-(3x_o-y_o)t-a=0$ 的解.

由韦达定理可知 $t_1+t_2+t_3=\dfrac{0}{4x_o}=0$,

即 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$.

(2)数学方法的层次性　数学是由低级到高级，由客观现实到抽象形成和发展起来的. 数学方法的载体是数学知识，数学知识具有层次性，因此也赋予数学方法带有层次性. 如二元一次方程组的解法，也有着层次：第一层次是代入法；第二层次是加减法；第三层次是换元法. 又如变换方法，钱佩玲教授将其表示为图 3－1－1 所示的层次图

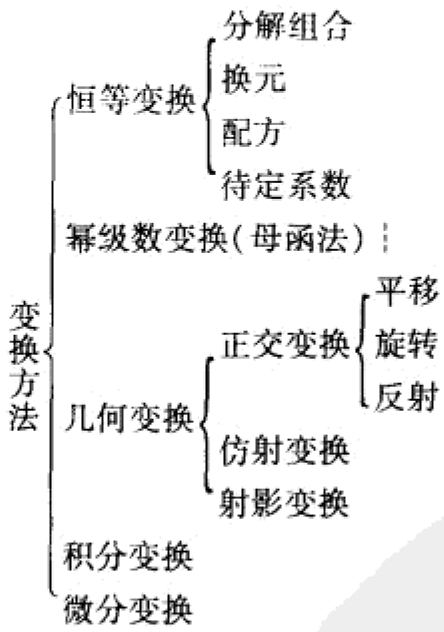


图 3－1－1

从中发现层次性越低，可操作性越强；层次性越高，它含的内涵越丰富.

(3)数学科学的特征和数学思想方法　钱佩玲教授在《数学思想方法与中学数学》中将数学的发展概括为三个阶段:创新阶段、理论建立阶段、应用阶段,作者认为数学发展应为:创新阶段、理论建立阶段、应用阶段和再发展阶段.用框图可表达为图3－1－2.

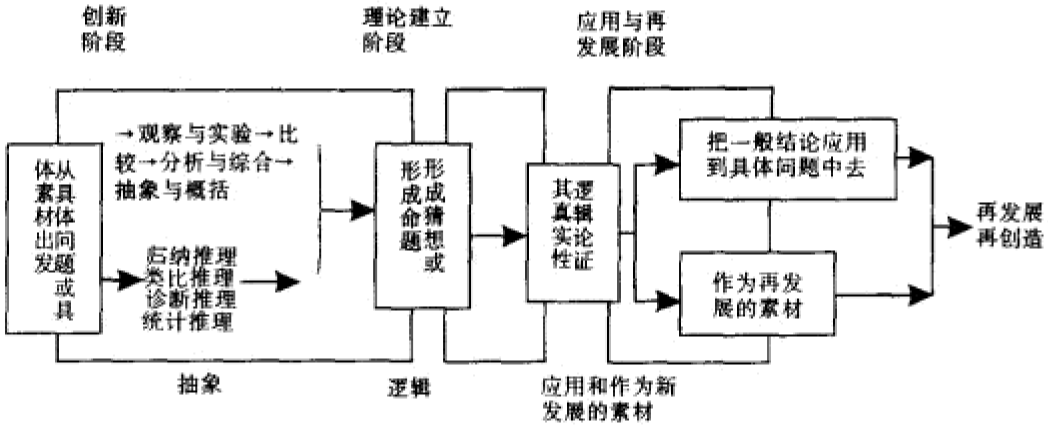


图 3－1－2

钱佩玲教授对框图表现的思想做了论述:①数学的发展始于对具体问题、具体素材的观察、实验、合情推理,并在此基础上进一步通过比较、分析、综合、概括,去揭示事物的本质.进而运用所获取的理论、思想方法去分析和解决问题.②数学不满足特殊情况的结果,追求理论的一般性,而是通过归纳、类比去探索研究事物的一般规律和方法.③理论的扩充,达到概念和理论更大范围内的统一,形成新的理论.关于数学活动中包含着数学科学方法,在观察、实验、比较、分析、归纳、类比中进行推理、发现、创造、证明和批判.同时,严格地依托逻辑学、数理逻辑、数学逻辑和公理论的工具.

§2　初等数学中的思想方法内容与数学学习

数学思想方法是数学学习的目的之一，又是数学学习的重要工具，即在某一时段内、某一个问题上、某一过程中通过学习获取的结果，它具有目的性；而在新的时间阶段内、新的问题上、新的过程中，又是获取学习结果的工具，呈现工具性. 本节将讨论数学思想方法内容及数学学习的关系.

一、初等数学中的数学思想方法

随着时代的发展，小学、中学、高中数学内容都发生了一些变化. 比如，从20世纪80年代以来，高中教材陆续增添了集合、逻辑初步、概率、统计、向量、行列式与线性方程、微积分等.

具体来讲，在代数部分，小学阶段所学的自然数、小数、分数的基础上，把数系扩充到有理数系和实数系，并明确了算律，充分利用算律解一元一次、二次方程，多元一次方程组，再进一步引进多项式及其运算，学习分式、根式，学习换元、配方、待定系数等代数解题的通法，最后介绍函数及其图像、统计初步. 高中代数把数系扩充到复数系，进一步加强多项式理论、方程理论的学习，在映射观点下加深对函数本质的理解，学习基本初等函数，学习数列与数学归纳法. 最后是二项式定理和概率初步，增加了概率统计的有关内容和微积分初步，还对逻辑初步知识作了适当的增补.

几何包括平面几何、立体几何、解析几何，属于从实验几何到推理几何和从推理几何到解析几何的阶段，高中新教材增加了向量的有关内容，以便通过向量及其运算把空间结构代数化，以向量为桥梁，将形、数更好地结合起来.

通过数学教与学的实践和改革，教材的一些内容还会进行调整和增删. 但不论如何在中学数学中，除了有观察、实验、归纳、类

比、分析、综合、抽象、概括等形成数学理论的方法，有一般的逻辑推理、证明方法，以及化归、递推、等价转换、推广与限定等常用的一般数学思想方法之外，还有着其特有的一些基本的数学思想方法，例如：

(1)用字母代替数的思想方法；

(2)集合的思想方法；

(3)函数、映射、对应的思想方法；

(4)数形结合的思想方法；

(5)最优化的思想方法；

(6)统计思想与数据处理方法；

(7)极限思想和逼近方法；

(8)分类的思想方法；

(9)参数的思想方法.

这些思想方法对于中学数学学习和学生的思维能力、解决问题能力的培养和提高起到推动作用.同时思想方法的形成也是学习水平提高的标志.比如：用字母代替数的思想方法，可以使学生思维水平实现飞跃.

从算术到代数，即从具体数字到抽象符号的飞跃；

从实验几何到推理几何的飞跃；

从常量到变量的飞跃(函数概念的形成和发展)；

从平面几何到立体几何的飞跃；

从推理几何到解析几何的飞跃；

从有限到无限的飞跃.

在上述诸多飞跃中，从具体数字到抽象符号的飞跃，掌握字母代替数的思想方法是整个中学数学重要目标之一.从用字母表示数，到用字母表示未知数元、表示待定系数，到换元、设辅助元，再到用$f(x)$表示式，表示函数等字母的使用与字母的变换，是一整套的代数方法.列方程、解方程的方法是解决已知量与未知量

间等量关系的一类代数方法，此外，待定系数法、根与系数的关系，乃至解不等式、函数定义域的确定、极值的求法等等，都是字母代替数的思想和方法的推广. 因此，用字母代替数的思想方法是中学数学中最基本的思想方法之一. 为什么有不少学生总认为 $3\alpha > \alpha$，$-\alpha < \alpha$，就是没有掌握用字母代替数的思想.

再如集合的思想方法：

集合的思想方法是现代数学的基础，在此基础上形成运用统一的语言. 采用公理化方法和思想，为现代数学的结构化、形式化、统一化提供了较好的表达、组织方式，作为基础的中学数学内容自然也有意识地渗透和运用集合的语言、思想方法.

在代数中应突出数系的通性、通法，渗透建立代数结构的思想，比如强调整数、有理数等数集和多项式集合关于加法、乘法（数乘元素）的封闭性，这就可为以后学习高等数学打下基础，从更高的观点来看待具体的运算.

几何中的轨迹法和交轨作图，也是运用集合的思想方法，通过训练学习从具体的数学对象抽象到集合的元素，进而进行分类等数学思想方法.

集合的思想里任一几何图形都是 R^1 或 R^2 或 R^3 的子集，因此，这就可通过集合术语（属于、包含、并集、交集、余集、空集），借助集合知识和描述集合特征性质间的关联，说明性质的逻辑关系. 例如：整体与部分的关系——全集与子集的关系；蕴涵——包含关系；析取——集合之并集；合取——集合之交集；非——余集（补集）. 以集合为工具，讲清一些基本逻辑关系、推理格式、这种思想方法还便于推广到 R^n 和抽象空间中，并可沿用原来的几何语言（如球、超平面等），这对培养几何直观能力是十分有益的.

比如函数、映射、对应的思想方法，对应研究的是运动变化、相依关系，以一种状态确定地刻画另一种状态，我们把研究状态过渡到研究变化过程称为对应思想方法.

函数概念在中学数学关于代数式、方程、不等式、排列组合、数列等主要内容中有程度不同的体现.

代数式可看作函数的值:3α 可看作函数 $y = 3x$ 当 $x = \alpha$ 时的值;

两个代数式 $f(x)$、$g(x)$ 恒等,等价函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 恒等于零;

方程 $f(x) = 0$ 的根可看作函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标;

在不等式的证明中,函数的性质经常是有力的工具;

数列是一种特殊的函数;

排列组合中的某些公式可看作是函数,例如排列数 $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)(m \leqslant n)$ 是二元函数,全排列 $A_n^n = n!$ 是一元函数,于是便可借用函数的有关性质处理相应问题;

映射是函数的发展,函数是一种特殊的映射,用映射观点看函数,更加突出了对应的本质.

函数概念的形成和发展是中学数学中从常量到变量的一个认识上的飞跃,因此,理解和掌握函数的思想方法无疑会有助于实现这一飞跃.

另外,数形结合的思想方法.

笛卡儿在对欧几里得几何方法与代数方式进行深入研究、比较、分析的基础上,创立了解析几何——一种研究几何问题的新方法;通过坐标系,将平面上的曲线用两个变量 x、y 的方程表示,使得图形的几何关系在方程的性质中表现出来,成为数形结合的典范,数学史上的里程碑.当然,我们今天的数形结合的思想方法有着更广的含义,但本质是一样的,它采用了代数方法和几何方法中的优点:几何图形的形象直观,便于理解;代数方法的一般性、解题过程的程序化、可操作性强、便于把握,因此数形结合的思想方法是学好中学数学的重要思想方法.高中新大纲中增加了

向量的内容，其目的之一是将它作为数形结合的桥梁，更好地理解和掌握数形结合的思想.

二、数学思想方法与数学学习

数学思想方法是数学的灵魂，是数学学习的指导思想和基本策略，是数学学习的目的和手段，因此，引导学生领悟和掌握以数学知识为载体的数学思想方法是数学学习的目标和任务. 同时通过数学学习去认识数学知识和数学思想方法的价值、魅力和数学美，从而去运用数学、发展数学.

发现数学是一部人类科学史中创新的辉煌篇章. 伽罗瓦开创了置换群的研究，用群论方法才确立了代数方程的可解性理论，彻底解决了一般形式代数方程根式解的这一难题. 解析几何的创立实现了形数沟通、数形结合及互相转化. 对应的思想方法解决了无穷集元素"多少"的比较问题，可把无穷集按"势"(或基数)分成不同的"层次"，等等. 从中可体会到，有了方法才获得了"钥匙"，数学的发展绝不仅仅是材料、事实知识简单的积累和增加，而必须有新的思想方法参与，才会有创新，才会有发现和发明. 因此，从宏观意义上来说，数学思想方法是数学发现、发明的关键和动力；从微观意义上来说，在我们的数学教学和数学学习中，要再现数学的发现过程，揭示数学思维活动的一般规律和方法，我们只有从知识和思想方法两个层面上去学习，从整体上，从内部规律上掌握系统化的知识，以及蕴含于知识中的思想方法，才能使学生形成良好的认知结构，最终达到提高学生洞察事物、寻求联系、解决问题的思维品质和各种能力，培养现代社会需要的智能型人才. 以知识为载体的数学思想方法，是使学生提高思维水平、真正懂得数学的价值有效途径. 建立科学的数学观念，是发展数学、运用数学的重要保证. 数学思想方法对于数学学习的意义更加明显.

三、关于数学思想方法的学习.

数学思想是数学内容的进一步提炼和概括,是以数学内容为载体的对数学内容的一种本质认识,因此数学思想方法是一种隐性的知识内容,要通过反复体验才能领悟和运用的. 数学思想方法是处理、解决问题的一种方式、途径、手段,是对变换数学形式的认识,同样要通过数学内容才能反映出来,并且要在解决问题的不断实践中才能理解和掌握. 从原则上来说,一般可以考虑尝试以下途径贯彻数学思想方法的教学.

1. 充分挖掘教材中的数学思想方法

数学思想方法是隐性的更本质的知识内容,因此教师必须深入钻研教材,充分挖掘有关思想方法. 例如:

在二元一次方程组的应用题部分,有一道题的解法用了"整体代入"的思想方法,教师应强调突出这一思想方法的优越性,因为这种"整体代入"的思想方法在以后将广为使用. 同时,这也是对字母代替数的更深刻的理解.

2. 有目的、有意识地渗透、介绍有关数学思想方法

在进行教学时,一般可从前面我们对数学特征及中学数学内容分析的数学思想方法中考虑,应是渗透、介绍或是强调层次,要求学生在什么层次上把握数学方法,是了解,还是理解,还是掌握,或者灵活运用. 然后进行合理的教学设计,从教学目标的确定、问题的提出、情境的创设,到教学方法的选择,整个教学过程都要精心设计安排,做到有意识有目的地进行数学思想方法教学. 比如:

化归是数学研究问题的一般思想方法和解决问题的一种策略,因此,我们可作为一种指导思想渗透在教学过程中,根据具体内容,通过渗透、介绍、强调等不同方式,让学生体验、学习这一思想方法. 解方程时,一般总是考虑将分式方程化归为整式方程、无

理方程化归为有理方程、超越方程化归为代数方程;处理立体几何问题时,往往把空间问题化归到某一平面上(这个平面一般是几何体的某一个面,或某一辅助平面),再用平面几何的结论和方法去解决;在解析几何中,一般可考虑通过建立恰当的坐标系,把几何问题化归为代数问题去处理;有关复数的问题可通过其代数形式或三角形式化归为实数问题或三角问题加以解决;从一个具体的解题方法和对不同题型的反复练习中提炼概括出一般规律和有关的思想方法等等.总之,通过反复的体验和实践,使学生从中学到用数学知识思考问题、解决问题的一般思想方法.

还可以结合具体对象和内容,渗透重要的意识和观点,介绍相应的方法:在有理数的有关内容中渗透数形结合的思想和矛盾统一的观点;在代数式中强调抽象的思想、数学形式化的观点和分类讨论的方法;在解方程和解不等式中强调等价转换的思想方法;在平面几何中渗透和介绍几何变换的思想方法、运动变化的观点;在立体几何和二次曲线中强调类比—猜想—证明的发现过程,渗透创新的意识等等.

3.有计划有步骤地渗透、介绍有关思想方法

在知识形成阶段,可选用观察、实验、比较、分析、抽象、概括等抽象化、模型化的思想方法,字母代替数的思想方法,函数的思想方法,方程的思想方法,极限的思想方法,统计的思想方法等等.

在知识结论推导阶段和解题教学中可选用分类讨论、化归、等价转换、特殊化与一般化、归纳、类比等思想方法.

在知识的总结性阶段可采用公理化、结构化等思想方法.

总之,由于数学思想方法是基于数学知识又高于数学知识的一种隐性的数学知识,要在反复的体验和实践中才能使个体逐渐认识、理解,内化为个体认知结构中对数学学习和问题解决有着程序性知识的稳定成分.对此,教材内容的合理编排和高质量的

教学设计是贯彻数学思想方法教学的基础和保证. 作为老师为学生提供良好学习的环境,充分体现"观察—实验—思考—猜想—证明(或反驳)"这一数学知识的认识、理解和再创造的过程,展现概括的提出过程、结论的探索过程和解题的思考过程. 从对数学具有归纳、演绎两个侧面的全面认识,从使学生掌握知识、形成能力和良好思维品质的全方位要求出发,去精心做好教学目标、内容、方法等的设计.

四、数学学习中教师的教学

教师教学活动中充分体现教的主体,是学生学好数学的关键因素. 我们主要探讨在数学教学过程中如何有效地发挥教师的作用.

1. 对数学学习的有效指导

在教学过程中,将数学知识灌输给学生、牵着学生走与通过启发学生思考、引导学生发现使其获得数学知识,是两种截然不同的数学教学观. 一般情况下,教师常常"控制"着课堂教学的过程,"支配"着课堂教学的时间,"主导"着课堂教学的方向. 然而,"控制"、"支配"、"主导"都应当是以学生的数学学习为中心和基础的,教师在课堂上的一切活动都应向学生发展的需要方面转移. 教师在教学过程中的作用首先在于对学生的数学学习的有效指导. 上海市青浦县数学教学改革实验大面积提高了教学质量,其教学结构包括具有层次性的五个环节:把问题作为教学的出发点;指导学生开展尝试活动;组织变式训练,提高训练效率;归纳结论,纳入知识系统;根据教学目标分类细目,教师回馈调节. 每一环节中,教师的有效指导都是十分重要的. 对学生的有效指导包括多方面的内容,有数学学习指导、思想道德指导、人格发展指导等等. 从过程角度看,教师在数学教学中的有效指导,首先是合理创设问题情境,激发学生的学习动机,使学生清楚问题所在,明

确数学学习目标；然后是以多种形式、多种手段引导学生发现知识，找出规律；最后是指导练习、归纳结论，指出进一步的数学学习目标.

2. 对数学学习的有效组织

数学教学是一种有序的社会活动，特别是在学校的班级教学中，教学的组织工作是重要的，杂乱无章、缺乏组织的教学不会是成功的教学. 教师作为教的主体，还体现在其组织者的身份上. 有效组织教学是依照数学教学计划，逐步实现数学教学目标的过程. 教学组织主要体现在教学的方式方法上，其有效性是由数学教学内容、学生、教学条件及教师本身特点等多种因素决定的. 教师应根据各种因素的具体特点，选择教学的方式方法制定教学计划，并在实施过程中激励促进教学的积极因素，防止干扰和有效控制消极因素，实现对数学教学的有效组织，保障数学学习的效率.

3. 对数学学习的有效评价

数学教学过程中，学生学习积极性的保持与充分发挥既在于教师的有效指导、有效组织，也在于教师的有效评价. 教学评价是对教学效果的科学判断，是利用一切技术、方法和手段准确地收集为教学决策提供的各种信息，评价的关键是教向学的转化的结果. 教师在教学过程中对学生学习的正确评价，能够有效地促进和引导学生的数学学习. 青少年学生十分看重教师对自己的评价，教师的评价对他们的学习以及思想、态度、情感、行为都有着较大的影响. 教师也从评价中获取学生个体学习状况的信息，为调整教学进度、作出教学决策提供依据. 因此，教师要重视和利用评价，本着公正、实事求是、促进学生学习的原则，充分发挥评价的诊断、导向、调整与激励功能，通过教学过程中的不断评价，端正教学的方向. 需要指出的是：数学教学过程中教师还应当引导学生参与评价工作，使其能够正确地评价自己和他人，这样做有

助于学生提高数学学习效率,更好地得到全面发展.

参考文献

1. 钱佩玲,邵光华. 数学思想方法和中学数学. 北京:北京师范大学出版社,2001

2. [美]波利亚. 怎样解题. 北京:科学出版社,1982

3. 关成志主编. 数学思想概论. 沈阳:辽宁教育出版社,1993

4. 解恩泽,赵树智. 数学思想方法纵横论. 北京:科学出版社,1987

5. 王仲春,李元中,顾莉蕾等. 数学思想与数学方法论. 北京:高等教育出版社,1989

6. 戴维·韦尔斯. 数学与联想. 李志光译. 上海:上海教育出版社,2000

7. 河南高师院校数学研究会. 数学方法论. 郑州:河南教育出版社,1996

8. 王子兴. 数学方法论——问题解决的理论. 长沙:中南大学出版社,2002

9. 张顺燕编著. 数学的源与流. 北京:高等教育出版社,2003

10. 周春荔,张景斌. 数学学科教育学. 北京:首都师范大学出版社,2003

11. 张奠宙,宋乃庆主编. 数学教育概论. 北京:高等教育出版社,2004

12. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

第二章　数学学习的抽象方法

毛泽东在《实践论》中说:“人类社会的生产活动,是一步又一步地由低级向高级发展,因此,人们的认识无论对于自然界方面,还是对于社会方面,也都是一步又一步地由低级向高级发展.”人们通过对物质的抽象、自然规律的抽象、价值的抽象等,获得对自然界的本质的认识. 通过抽象,“我们从有限中找到无限,从暂时中找到永久”. 在思想上把个别性提高到特殊性,再从特殊性提高到普遍性. 从而使“一切科学的(正确的、郑重的、非瞎说的)抽象都更深刻,更正确,更完全地反映着自然”(列宁《黑格尔<逻辑学>一书摘要》). 抽象方法也是数学活动的一般方法,本章将对科学的抽象、抽象的方式等进行讨论.

§1　数学的抽象

一、思维结构

心理学对思维的研究包含两个层次:其一,是从大脑反映现实的本质和内在联系的过程方面揭示认识的高级形式,这属于理性认识过程;其二,是研究外界的变化和发展如何成为意识事实,即感性认识向理性认识转化的过程,其中感性认识包括感觉、知

觉、表象，它们都是思维的基础，而表象是感性认识向理性认识过渡的中介，理性认识包括概念、判断、推理，而概念是思维的细胞和主要形式.思维的物质性如图3－2－1是人脑对客观事物运动规律性的反映，是物质运动规律性转化为思维活动的过程.思维过程有着抽象特征，但是这种对事物运动的规律性反映用数学的观点来讲，是由物质运动到思维活动的一个同态映射.

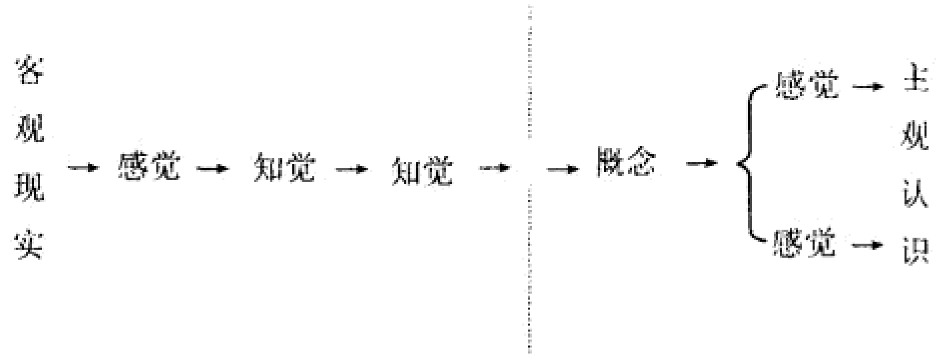


图3－2－1

思维结构是人们在现实客观世界中形成的，是由最基本的要素构成的开放性系统，它是不断演变、进化的.

二、科学的抽象

认识客观世界的第一步就是观察和实验，而由此所得的只是一些感性认识和具体的素材.对这些材料进行理性的加工，才能进一步认识到客观事物的本质属性，而对其加工的主要方法就是抽象.

1. 数学抽象

客观世界是由相互联系的客体组成的，而每一客体都有许多方面的属性，如大小、形状、质量、颜色、化学成分……这些属性都

统一于客体之中，而人们对客体的认识，只能是一个侧面一个侧面的分别去认识. 为了认识某一方面的属性，就要暂时舍弃其他方面的属性，这样才能获得对所专注属性的认识. 这种认识的方法就叫抽象. 例如，自然界中本没有纯铁，只有和其他矿物共生的铁矿石，为了得到纯铁，就要排除杂质，炼铁的过程就是排除杂质的过程. 抽象就相当于炼铁、提纯.

科学研究就是要揭示事物的共性和联系的规律，因而就要着眼于整体、着眼于事物的类，把每一个具体事物的特殊性忽略. 也就是按类的共性把具体对象简略化、理想化，这样所抽出的共性，虽然只是每个具体事物的近似反映，但它却深刻地反映了事物的类. 科学概念、科学理论、科学方法，都是科学抽象的成果，数学抽象属于科学抽象的一种.

(1)抽象是获取概念的手段　概念是科学认识成果的概括和总结，是以压缩的形式表现大量知识的手段，它是抽象思维的细胞. 各门学科都有自己独有的概念，它们的原理、规律，都是由科学概念组成的.

自然数概念的建立，是数学发展过程中取得的最初成果，也是最重要的成果之一. 如自然数概念的建立大概可分为以下几个阶段：第一阶段，意识到某些具体集合之间的"等数性". 能发现 5 头羊和 5 个手指之间具有的共同性，需要高度发展的智慧. 第二阶段，用一个熟知集合(例如，手指的集合)去表示另一个与之有等数性的集合. 意识到集合中事物的个数与具体事物的其他属性无关. 第三阶段，从一些等价集合中抽出共同的属性，舍弃其他的属性，形成纯粹的形式，赋之以代号，如一、二或 1、2 等，这时还是具体的一个一个的数. 第四阶段，认识到这些具体的数都是一类等价集合的标志，在这一点上它们是共同的. 这才形成了自然数的概念.

几何中的"点"、"直线"、"平面"，也是着眼于客体的一个侧

面——形，而舍弃了其他属性并理想化了的结果.

有了这些抽象的概念，才能提出一般性的问题，与之有关的研究才能开展. 例如，有了自然数的概念，素数分布问题、孪生质问题、完全数问题、勾股数问题、哥德巴赫猜想等问题才有产生的基础，在此基础上，这些问题才会接踵而来.

又如，假若只有具体的一个一个的一元二次方程 $x^2-5x+1=0$、$2x^2+3x-4=0$ 等，而没有抽象的"一元二次方程"这个概念，从而也没有它的一般形式的表示 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$. 那么，我们只好去解决一个一个具体的一元二次方程，谈不上对一元二次方程的一般性研究.

如果只有一次方程、二次方程，甚至代数方程、超越方程这些概念，而没有总的抽象的"方程"这个概念，就谈不上一般地去研究方程的求解理论，更不会有一类一类抽象的求解方法.

(2)抽象使概念具有广泛的外延　抽象的形式并不意味着脱离现实，恰恰相反，它能反映更丰富、更多样的现实内容. 在函数 $y=ax^2$ 中，只要赋予字母 a、x、y 适当的意义，它所反映的既可以是圆面积与半径的关系，也可以是自由落体中路程与时间的关系或抛射物体中高度与水平距离的关系.

对于式子 $\frac{dy}{dx}=2x$，

只要赋予变量 x、y 适当的意义，它既可以代表曲线的斜率，也可以是物体运动的速度或化学反应的速度.

(3)抽象的功能是多样的　科学抽象的成果，除了科学概念、理论还有科学方法. 科学知识发展的同时，必然会从其研究的过程和成果中，总结、提炼出相应的科学方法. 提炼得出的科学方法，又会促进科学知识的发展. 例如，解决数学问题的结果反推法、特殊值法、变量代换法，都是从解决不同问题中发现了共性之后抽象出来的. 再如某些代数问题、几何问题、微积分问题，从表

面看来是截然不同的，但这些问题的解决却有着同一的框架，并且，由它们抽象出了变换反演原则，成为启发人们思考数学问题的一种有效方法(如第三章论述的化归方法).

发现现实世界中许多方面的共同的联系形式，用统一的方法去处理，这是科学研究的重要任务，抽象的形式不只是统一地处理已知现象，并要能指导新工作的开展，预见新工作的结果，也可能用在未来其他问题的处理上，这是理性思维的超前作用.

王仲春教授将抽象的形式比作一个空筐，它可以装得下有适度任意性的物品，抽象度越高，装容的灵活性就越大. 因此，他们把各种抽象的形式称为“空筐装置”.

抽象使工具和方法可以有广泛应用，抽象还能从更高的角度发现停留在低层次时所不能发现的事物之间的关系和共同点. 例如，微分与积分，在微积分的范围里，只能看出它们是互逆运算，而当引进了线性算子的概念之后，从这个角度看，微分与积分却具有相同之处，即它们都是线性算子.

又如，在初等数学范围里，指数函数与三角函数是各自独立的，看不出它们有什么联系，而在高等数学里，它们的关系由式子

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (z = x + iy)$$

所确定. 从而把指数函数与三角函数联系在一起，进而对数函数作为指数函数的反函数，自然也和三角函数发生了关系.

2. 数学抽象的特点

数学中的抽象，与其他学科中的抽象相比，有它独具的一些特色. 数学抽象是一种特殊的抽象，按钱佩玲、邵光华两教授的观点，具体表现在抽象的内容、程度和方法等3个方面.

(1)内容上的特殊性——数学抽象仅抽取事物或现象的量的关系和空间形式而舍弃其他一切.

客观事物都具有质和量两个方面，质是指一事物区别于他事物的内部规定性，量则是指事物存在的规模、方式以及发展的程

度、速度等.质的问题构成了各门自然科学的特定研究对象,如物理性质是物理学研究的对象,化学性质是化学研究的对象.量的问题便构成了数学的研究对象.从历史的角度看,“数”和“形”曾是“量”这一概念的两个最基本的内容.笛卡儿在《指导思维的法则》一书中设想了“通用数学”他提出了一个大胆的计划:

任何问题→数学问题→代数问题→方程的解

这个计划里就蕴含抽象:把“任何问题→数学问题”.

正因为此,恩格斯指出:“数学是研究数量关系和空间形式的一门科学.”这便清楚地表明了数学抽象的特殊内容:数学的抽象完全舍弃了事物的质的内容,而仅仅保留了它们的量的属性,即数学抽象的目的意向只是数量关系和空间形式.这种特殊的抽象决定了数学与其他自然科学的区别,也决定了数学抽象的特殊性:数学抽象具有量化特征和形式化特征.如哥德斯堡七桥问题的解决过程.

哥德斯堡七桥问题　18 世纪,哥德斯堡城为东普鲁士的首府,布勒尔河穿城而过,它由两个支流(一个叫新河、一个叫旧河)在城中心汇合而成,河上有七座桥(如图 3-2-1),河中间有一个叫克莱夫霍夫的小岛,岛上建有一座教堂和一所大学,还有哲学家康德的墓地和塑像,因此,当地的居民,特别是大学生们常到附近散步.“如何能够不重复地一次走遍这七座桥而返回出发地?”这是数学史上著名的“哥德斯堡七桥问题”.

这个问题多少年来一直没人解决.欧拉成功地解决了这个问题.考虑到岛与河岸视为点 A、B、C、D,而桥是连接两点的线.这样图 3-2-2,抽象为图形 3-2-3.

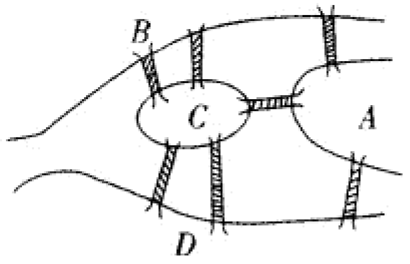


图 3－2－2

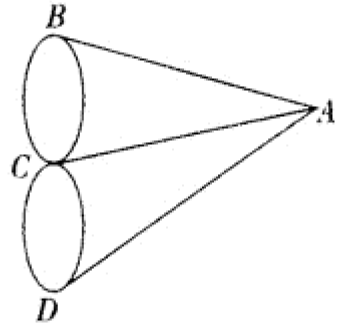


图 3－2－3

这样在图 3－2－2 的基础上将“不重复地一次走遍七桥而返回原地”，抽象为“一笔画出图形而返回始点”．通过两次抽象，发现有些点（发出的线的条数为偶数）为偶点；有些点（发出的线的条数为奇数）为奇点．最终发现一笔画成图形的重要特征是：奇点数只能是 0 或 2．据此：图形 3－2－2 一笔画成是不可能的．从而证明哥德斯堡七桥问题“不重复一次走遍七桥而返回原地”不可能．

由上看出，欧拉解决问题的关键是两步抽象．

（2）多层次性　从解决哥德斯堡七桥问题的过程还表现出抽象的多层次性．数学的概念或规律，大多是经过多层次的抽象才得到的．并且，人们也一再谋求着抽象基础上的再抽象，把抽象的程度作为数学进步的标志之一．

欧氏空间已是一个抽象的概念，而当人们只把注意力集中于“距离”的本质属性：非负性、对称性．三角形不等式成立时，引进了“距离空间”的概念，这时的距离已不再是通常意义下的距离，“距离空间”包括了欧氏空间，当人们再注意到由距离所产生的拓扑结构只是一种特殊的拓扑结构时，又引进了拓扑空间的概念，它们之间的关系可以形象地表示为：

$$欧氏空间\subset距离空间\subset拓扑空间$$

函数是数集之间的一种映射，如果把它的定义域由数集改为具有某种性质的一般集合，就把这种映射称为泛函；而把一般集合到集合之间的映射称为算子. 它们的得来都是在前边抽象的基础之上再抽象的结果.

数学家所不懈追求的是推广前人的工作，把一种规律表现为更一般的形式，用同一的形式概括更多的内容.

拉格朗日中值定理、柯西中值定理都是人们已经得到的抽象规律，而下面的定理：

若函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

却能包括拉格朗日定理和柯西中值定理，事实上，当 $h(x)=1$ 时，就得到柯西中值定理；当 $g(x)=x$ 时就得到拉格朗日中值定理. 这也就是说，上述定理比拉格朗日中值定理和柯西中值定理更具有一般性.

再如高中教材中的不等式证明中，有一题：

$$\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$$

人们并没有就此停止，进一步发现了：

$$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d \text{ 且 } a+d\leqslant b+c,$$

则
$$\sqrt{a}+\sqrt{d}\leqslant\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

或者

$$a^{\alpha}+d^{\alpha}\leqslant b^{\alpha}+c^{\alpha}\quad(0<\alpha<1)$$

这些都是把眼光局限于幂函数的结果. 而实际上，这类式子的成立只依赖于函数上升性及凸函数，且 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$、$a+d\leqslant b+c$，则有：

$$f(a)+f(d)\leqslant f(b)+f(c)$$

一次比一次更一般、更抽象，这就是数学研究的追求. 数学抽象是一种构造性活动，是借助定义和推理进行的逻辑建构. 如“直角三角形”是“一般三角形”中定义出来的. 再如纯数学中：环→理想→商环的函数抽象.

可以看出，这些概念的抽象形成都是在原有概念基础上通过增加“条件”逻辑定义而成. 对此，徐利治教授称这种特殊的抽象方法为逻辑建构①：数学抽象在方法表现形式上是在原有数学对象的基础上通过逻辑定义来建立和构造新的数学对象. 这一点正如数学家 H・汉凯尔所说：“大多数的学科里，一代人的建筑为下一代人所摧毁，一个人的创造被另一个人所破坏. 唯独数学，每一代人都能在古老的大厦上添加一层楼.”正是数学抽象的这种构造性特点决定了数学抽象具有层次性的特征.

(3)程度上的特殊性——数学抽象达到的程度远远超过自然科学中的一般抽象.

关于数学的抽象可在“数学”的定义演化中去体会它. 20 世纪 80 年代美国学者将数学定义为“模式”的科学：[**数学**]**这个领域已被称作模式的科学. 其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性**. 这一定义实际上用“模式”代替了“量”. 所谓的“模式”是具有高度的抽象性，它包括了数的模式、形的模式、运动和变化的模式、推理和通信模式、行为模式……这些模式可以是现实的，也可以是想像的；可以是定性的，也可以是定量的. 数学这一新定义正因为它具有的高度的概括性，使得数学更加抽象.

3. 数学抽象的方式

关于数学抽象的方式，钱佩玲教授在《数学思想方法与中学

---

① 徐利治，郑毓信著. 数学抽象与抽象分析法. 南京：江苏教育出版社，1990

数学》中将其分为:性质抽象、关系抽象、弱抽象、强抽象等.

(1)性质抽象　所谓性质抽象,就是考察被研究对象某一方面的性质或属性,而抽取符合量性方面的性质或属性的抽象,钱佩玲、邵光华二教授将性质抽象分为以下两个步骤:分离和概括.

分离　将被研究对象从它的现实背景中分离出来,把客观上与它共存但与研究目的无关的事物统统舍弃.然后进一步把被研究对象某一方面的性质属性同其他的性质属性分离开.

概括　对分离出来的性质属性进行专门研究,并将所得的结论作为一般性认识从特定的对象及具体背景中独立出来,从而形成概括的纯粹的认识.

性质抽象是形成概念的一条重要途径.数学中的概念都是具有一定属性的概念,即都有精确的内涵和外延.要想形成一种概念,显然必须将其内涵的性质抽象出来,并通过概括,用词语表达出来.

实际抽象过程中,概括通常不是一次完成的,有时需要对两个以上的同类对象进行反复分析、比较才能完成概括而形成概念.如等腰三角形概念的抽象形成过程,单单从标准位置的等腰三角形图形(底在下面)抽象是不够的,尽管从中也能抽出它的本质特征——两条边相等.只有通过对各种位置的等腰三角形图形进行分析、比较,获得足够丰富的感性认识,我们才能从中抽象概括出一个成熟、深刻和清晰的等腰三角形属性.

(2)关系抽象　数学关系抽象,是指根据认识目的从研究对象中抽取或建构若干构成要素之间的数量关系或空间位置关系而舍弃其物理现实意义或其他无关特征的抽象.关系抽象一般也分两步:

第一步,分析影响问题的因素、确定问题的范围.

现实世界中的事物或现象,从它们与问题的相关程度来说,可以分为三类:①作为直接研究对象的事物或现象.②对被研究

对象有影响，但本身不是研究对象的事物或现象. ③与研究对象无关或其本身的影响可忽略不计的事物或现象. 在进行关系抽象时，第三类是完全不需考虑的，第二类也只需做适当处理，重要的是弄清第一类，以便确定问题涉及的因素及范围.

第二步，对与问题直接或间接相关的因素之间的相互制约关系进行专门研究，以抽取、确定其中的关系.

这一步的具体操作程序是：①将障碍"视线"、模糊事物或现象内在联系的细节尽可能排除掉，从而在"干扰"较小的状态下考察某些特定因素之间的数量制约关系. ②在思维中把现实的研究对象充分理想化. ③把经过简化的现实问题转化为一个纯数学问题，运用数学的推演工具来确定变量之间的关系.

当然，对于一个纯数学问题中的关系抽象，我们只须运用数学的推理、演算来导出其关系.

关系抽象在处理问题过程中是经常用到的，有时解题的关键就在于一个关系的抽取或建构. 如求值$(2\sin80° - \sin20°)/\cos20°$，若仅从直观上抽取$80° = 4\times20°$这个倍数关系，问题将难以解决，而若从特殊角出发，建构$80°$角与$20°$角的如下关系$80° = 60° + 20°$，问题便可迎刃而解：

$$\frac{2\sin80° - \sin20°}{\cos20°} = \frac{2\sin(60° + 20°) - \sin20°}{\cos20°}$$

$$= \frac{2\sin60°\cos20° + 2\cos60°\sin20° - \sin20°}{\cos20°} = \sqrt{3}.$$

又如：求满足条件$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$的实函数$f(x)$，通过观察条件等式的特征，易发现式中含有未知函数$f(x)$和$f\left(\frac{1}{x}\right)$，其变元$x$、$\frac{1}{x}$恰是互为倒数关系，于是，用替换$x$，就可抽象（建构）出隐

含于原关系式中的另一类：$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}$. 这样就可从两个关系中求出 $f(x)$ 来. 所以，解题过程中要注意根据问题的条件特征抽取或建构有利于解题的新的关系.

(3)弱抽象　弱抽象就是逐渐减弱对象的特殊性，即舍去对象的一些特征而仅抽取其某一特征或某个属性加以概括，形成比原对象更为普遍、更为一般的对象的一种抽象方法. 以现实事物或现象为原型进行基本概念的抽象就是弱抽象，以建立起的概念或模式作为原型而抽象形成更广的、以原型作为其特例的数学概念或模式的抽象，也是弱抽象，它舍弃了原型的一些本质特征. 如从“全等三角形”概念出发建构“相似三角形”概念的过程就是一种弱抽象过程，它舍弃了全等三角形的“边相等”属性仅保留“角的相等”特征，或者说舍弃了“大小”的要求仅保留结构形式的相同.

数学中，一些重要概念的历史演进及命题形成实质上都是一系列弱抽象过程. 如函数概念的发展，函数概念的每次扩张都是弱抽象，如图 3-2-4 所示.

至于弱抽象的结果，对于概念型抽象，外延扩大，内涵减少；对于原理型抽象，则原理更普遍，范围更广.

(4)强抽象　强抽象就是指通过强化对象的特征，即增加新特征来完成抽象建构，以形成新概念或模式的抽象形式.

如函数概念和四边形概念分别可组成图 3-2-5 的“强抽象链”.

强抽象的过程，就其结果形式而言，可以看成是概念的适当组合，因此，强抽象是作为数学抽象的特征形式——逻辑建构的最好体现，它使我们体会到了数学抽象的建构特征. 但是，强抽象中增加的新特征往往不是现成的，其抽象往往具有创造性. 一般而言，在原型中引进的新特征，应是原型中的部分对象具有的(至

少有这种潜在可能)，所以，强抽象的实质就是对原型中的部分或子类对象的再抽象，抽象方法可能不再是直接对原型中部分对象的直接考察而抽象特征，而是通过引进新的关系或运算造成原有概念的分化，对分化出的子类再抽象其共同特征，作为定义新概念的内涵特征，或是尝试添加新的特征强化原型，使之成为原型的子类或子概念.

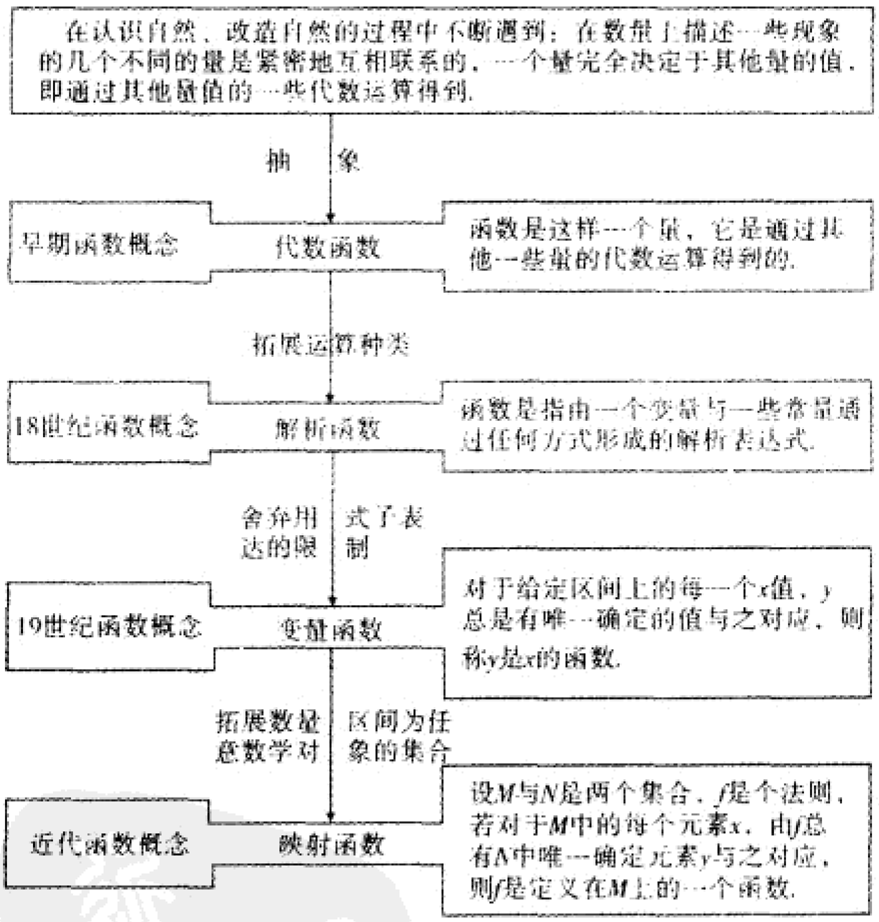


图 3－2－4

弱抽象、强抽象是数学学习的两种常见构造性活动. 数学中每当有一新的概念模式被抽象形成后，人们总是以其为原型沿着两个方向去发展它：通过强抽象，研究它的一些特殊形态，使我们

更清楚地认识这一概念模式;通过弱抽象,研究它的更一般的结果,使之进一步推广形成更普遍的理论,人们通过弱抽象和强抽象构建个体的知识结构. 例如,(数学)矩阵概念提出后,人们正是通过强抽象去研究各种特殊的矩阵:对角矩阵、分块矩阵、初等矩阵等模式来丰富矩阵理论,又通过弱抽象去研究更一般的矩阵(如 λ—矩阵等)进一步发展矩阵理论的.

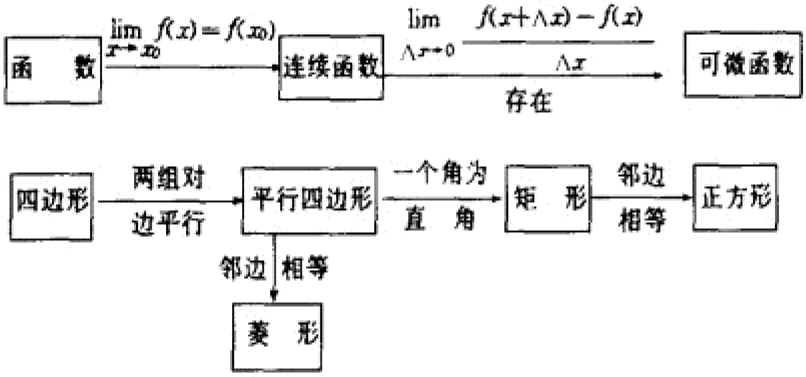


图 3-2-5

(5)等置抽象　等置抽象就是依据某种等价关系抽取一类对象的共同性质特征的抽象方法. 实际上从同一类事物中抽取共同性质特征的抽象可视为等置抽象. 这是因为,具有某种共同性质特征的一类事物可看作是根据"具有该共同性质特征"关系的全体事物分类的结果,而这种"具有该共同性质特征的"关系是一种等价关系.

如以三角形是否具有"两边相等"这种性质为标准进行分类,将得出"两边相等"三角形的集合,该集合的性质特征就是"等腰性",故从中抽象出的概念——等腰三角形就可看作是"两边相等"、"三角形集合"等置抽象的结果.

(6)无限抽象　"无限"概念是数学研究的一个重要概念,我

们称涉及到无限概念的抽象为无限抽象.

人们早就发现,对待无限或无限过程可以有两种截然不同的、在概念上互相排斥的理解方式:一是把"无限"看成是永远在延伸着的东西或变程,它是一种潜在的而不是实在的东西,如自然数列 $1,2,3,4,5,6,\cdots,n,n+1,\cdots$ 就是一个代表. 二是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体,如把自然数全体理解为一个实在的无限集合 $\{1,2,3,4,5,6,\cdots,n,\cdots\}$,并用符号 $\mathbf{N}$ 表示,$\mathbf{N}$ 显然就是一个确定了的不变的东西,其中的元素没有先后,没有地位高低,显然,两种理解方式是对立的:前者把无限理解为永远不能完成的变程;后者则是把无限理解为可以完成的过程. 在数理哲学上,把进程式的无限称为潜无限,把完成式的无限称为实无限,从而也就有两类无限抽象.

例如:自然数列的抽象就是潜无限抽象,自然数集 $\mathbf{N}$ 就是实无限抽象. 潜无限抽象,是我们把握进程式无限的一种手段,它舍弃了我们所处的时间与空间的局限性.

实无限抽象的数学对象与其构成的可能性无关,它可以被视为与有限对象一样的东西,如自然数集是一个实无限抽象的概念,它可以看成是一个完成了的集合,可以像有限集合一样进行集合运算:

$\{1,2,3,4,5\}\cap\mathbf{N} = \{1,2,3,4,5\}.$

$\{1,2,3,4,5\}\cup\mathbf{N} = \mathbf{N}.$

实际上,无限是潜无限与实无限的统一. 在进行无限抽象时,往往同时需要采用潜无限抽象和实无限抽象两种方式.

无限抽象是数学中一种重要的抽象方式,是人们认识无限、把握无限的手段. 缺少无限抽象能力的人是不能理解有关无限的数学及"高深"数学的. 如数学归纳法原理、极限概念及现代数学.

§2　数学抽象的若干原则

抽象性之所以是数学的最基本特征之一，是因为数学家所研究的事物是抽象的事物，研究的方法也是抽象的方法. 从数学史可知，古希腊人早已明确地强调了数学的抽象性，坚持对数学命题作出理论证明，并由此成功地提出和发展了公理化方法. 尽管古希腊数学的研究对象是抽象的概念，是非真实的事物或现象，但是，其抽象性事实上主要是将客体对象的"理想化". 那时的"理想化"①是将欧氏几何是物质空间以及此空间内图形性质的正确的理想化，到了19世纪中叶，特别是由于非欧几何的建立和四元数的出现，数学家的研究思想才开始发生变化，不再认为数学只是对于依附于真实事物或现象的数学模型的研究，和由具有明显直观意义的对象为出发点建立相应的公理系统，而是通过数学抽象这种特殊的构造性活动，去构造出各式各样相对独立的数学模式作为直接的研究对象，并借助于所谓的"假设—演绎法"去从事各种对象的研究.

一、逻辑建构形式化原则

数学本身是抽象概念和它们相互关系的规则，是用这些概念及关系表示符号的纯粹形式上的思考和研究，故数学抽象在纯粹数学研究中，其主要表现为关于这些符号的操作、组合，即符号形式的逻辑建构. 例如，合同矩阵、相似矩阵就是在矩阵概念模式基础上抽象建构新概念模式的.

可逆矩阵：对于 n 阶矩阵 A，若存在矩阵 B，使 $AB = BA = E$，则称 A 是可逆的，B 是 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}.

---

① M·克莱因. 古今数学思想，第三章. 上海：上海科技出版社

矩阵的合同、相似概念：数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B 称为合同的，如果有数域 P 上可逆的 $n\times n$ 矩阵 C 使 $B=C'AC$；若 $B=C^{-1}AC$，则称 A 相似于 B，记作 $A\sim B$.

有时为了研究的方便，还作一些纯形式的规定，如 $a^0=1$ $(a\neq0)$，$0!=1$，$C_n^0=1$，这些规定应与已有理论保持和谐一致. 可以说正是由于 $a^0=1$ 与除法定义、幂的除法法则的和谐一致，才使得整数指数幂有了统一的除法法则：$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

综上所述，我们可形成如下数学抽象的形式化原则：

对现实原型进行数学抽象，必须使之舍去现实意义，仅保留其数量上或空间上的形式结构特征，并给抽象物以无歧义性的逻辑精确性和简洁性的形式表述，之后作为具有普遍意义的模式纳入纯粹数学的研究范畴；在纯粹数学研究中，数学抽象就是借助于明确的定义在已有模式基础上构造新模式的逻辑建构，建构的新模式应具有一定层次上的普遍性和概括性，在与已有理论的关系上，应做到和谐统一，不能引起有关知识领域的矛盾.

二、弱抽象原则

1. 特性析出规范化原则

弱抽象可以看成是用一般化方法去构造新的数学对象的思维活动，指从原型中抽取某些特性或侧面而舍弃其余特征，形成比原型有较弱限制，从而就更为普遍、更为一般的模式的方法. 显然，弱抽象的关键是将原型的某些特性分离出来，并规范化为一般模式. 如“棱台”和“拟柱体”的概念.

棱台有诸多性质，比如：①所有的顶点都在两个平行平面内；②各侧棱延长交于一点. 我们将①分离出来，舍弃其余，通过规范化定义就可得拟柱体概念：所有的顶点都在两个平行平面内的多面体叫拟柱体. 所以，拟柱体是棱台弱抽象产物.

综合前述,不难看出:第一,只有结构内容较为丰富的对象才可能成为弱抽象的原型;第二,实现弱抽象的关键一步在于如何对原型的性质作出分析,并从中分离出某个或某类特征(称此过程为特性析出过程);第三,为了完成弱抽象,又必须以明确的数学语言去表达析出的特性,并以此为内涵,采用规范化的定义或描述去构造出新的更为一般的对象.由此,我们概括出弱抽象的一般方法论原则.

特性析出规范化原则:人们可以将一种结构内容较为丰富的对象作为弱抽象的原型,通过特性析出、精确的语言表达、规范化的手法,建构更为一般的模式.

2. 新元添加完备化原则

从另一个角度看,概念式弱抽象就是概念的概括,即减少内涵、扩展外延,增加研究范围的方法.而扩展外延,是要在原有外延范围内增添新的元素.显然,这种新添元素或者与旧元有关系(可由原外延中旧有元素构成),或者无本质联系.

如从自然数到正分数的弱抽象可以看成是为了使自然数对除法运算封闭而添加形如$\frac{b}{a}$(a、b皆为自然数)的新数而实现的.

非负有理数(算术数)到有理数的弱抽象可以看成是为了使算术数对减法运算封闭而添加如$-q$的新数而实现的.

再如,由欧氏空间到射影空间的弱抽象可以看成是通过添加理想的无穷远点而实现的.

以上举例可以看出,通过添加新元扩展外延方式实现的弱抽象,缺少特性析出过程,重在通过添加实现某种完备化(如运算封闭、对称性),一般说来,完备化是由不完备到完备的过渡过程:其实,将不完备的东西(相对某方面而言是局部的东西、有"残缺"的东西)扩充或补充成完备的东西(整体的东西、相对完美的东西)是人们的一种追求,是认识不断深入扩展的表现.作为一种创造

模式，徐利治教授等给出了如下新元素添加完备化原则.

新元素添加完备化原则：如果某种（新）“运算”在原先的结构系统中不是畅行无阻的，这时就可考虑引入适当的新元素以实现所说意义上的完备性.

3. 对偶化原则

欧氏平面上添加上无穷远点，不仅使关于直线和点的理论变得十分和谐、优美，而且还得到了几何上著名的“对偶原理”：

对偶元素：点↔线.

对偶运算：过一点作一条直线↔在一条直线上取一点.

对偶变换：一个命题中的元素和运算替换成对偶的元素和运算.

对偶命题：一个命题中的所有元素和运算都是另一个命题中的相应元素和运算的对偶，则称此两个命题为对偶命题.

对偶原理：如果一个命题是射影几何中的定理，则它的对偶命题也一定是射影几何中的定理.

一般情况下，在数学中常存在相关联的两个数学结构，它们具有某种“对偶关系”（或称为对偶结构），那么，根据此对偶关系，我们就可通过其一的研究去解决另一问题；还有些结构是“自对偶”的，这时我们又可通过原命题构造其对偶命题，二者又同真同假，从而能获得事半功倍之效，上述思考处理问题的方法称为对偶化方法. 对偶化方法在数学中有着广泛的应用.

如三角学中的对偶原理：

对于一个形如 $f(\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha) = 0$ 的恒等式，由 α 的任意性，换以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，则得到恒等式 $f(\cos\alpha, \sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha) = 0$，反之亦然，这就相当于在关于 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ 恒等式中，将其依次换成 $\cos\alpha, \sin\alpha, \cot\alpha, \tan\alpha$ 仍得一恒等式，这便是三角学中的对偶原理. 更一般地有，在一个三角恒等式中，将同角的函数

名换以对偶数名(不一定每个角都换),仍得一恒等式.

总之,研究探讨对偶结构,既有利于新命题的构造,又可转化命题的证明.所以,在数学中应善于把有关数学模式按对偶化方法联系起来,善于发现系统中的对偶关系,并从这样的角度去进行新的研究.我们称此为结构关联对偶化原则.

三、强抽象原则

1.特征定性组合化原则

对概念模式引入新特征,实质上就是增加概念的内涵、缩小概念的外延,使研究落在一部分对象上.显然,新特征正是这一部分对象的共同特征,由此,提出概念强抽象的一个原则——特征定性组合化原则:

人们可以对原型的部分对象所具有的个别特征加以抽取定性,与原型特征组合在一起规定或定义新的模式,表现形式常是概念的限定或组合①.

例如,人们在三角形的研究中发现,有一些三角形的两条边是相等的,从而通过对这一部分对象的这一个别特征抽取定性,就形成了等腰三角形概念;对四边形的研究中,发现一类对边平行的四边形,通过抽取定性形成了平行四边形概念;对矩阵的研究,发现有些矩阵的行列式值不为零,有些为零,通过抽取定性,形成了可逆矩阵概念.这些都是上述原则具体应用的体现.由此也可看出,新特征的抽象往往是由于“分化”引起的,它使我们的研究向纵深发展.但是,如果对原型没有很好的研究,不能“分化”,也就不可能出现对原型的强抽象.

2.关系定性特征化原则

在原结构中引入新的关系或运算实质上是改变了原结构,强

① 钱佩玲.数学思想方法与中学数学.北京:北京师范大学出版社,2001

抽象实质上就是对新的关系结构的再抽象，由此我们有相应的方法论原则①.

我们可以在一个系统的对象之间引入某种新的关系（例如可以是某种映射、对应关系或运算法则等），从而在形成的新的关系结构中，把可能出现的某种性质作为特征规定下来，最后通过概括原则把它规定为一个普遍范畴或某种普遍属性.

这一原则的具体应用也是不胜枚举：函数的可微性与可积性概念、代数系统的同构与同态概念、置换群的正规子群与商群等.其实，凡数学中利用映射对应法则或是借助于新运算来引出新概念新对象的方法都可归入这一原则的运用范围.

3. 命题强抽象的特殊化原则

关于命题的强抽象，实质上就是命题的特殊化，通过加强命题的条件，而得新的结论.如对三角形内角和定理若增加条件“三角形是直角的”就得到强抽象命题：“直角三角形两锐角互余”；若增加条件“三边相等”则得强抽象命题“等边三角形每个角都等于60°”.

命题式强抽象在数学中是一种普遍现象.这从数学中大量存在的定理的推论（系或衍论）就不难明白.推论是指那些从定理能直接推出的结果，所以，它可看作是定理的特例，是强抽象的产物，显然，从定理到推论的强抽象过程一般较容易，但这并不意味着它不重要，法国数学家阿达玛（Jacques，Hadamard 1865～1963）就曾为他在几何及微分方程的研究中未顾及某些推论以致失去很多重大发现而后悔过.因此，获得一个公式定理后，可考虑通过增加条件限制等手段将它应用到各种独立的特殊对象模式上去，以便得到各种便于运用的特殊命题.

---

① 徐利治.数学方法论选讲.武汉：华中工学院出版社，1988

参考文献

1. 钱佩玲，邵光华. 数学思想方法与中学数学. 北京：北京师范大学出版社，2001

2. 王申怀. 编写新教材中的一些感想. 数学通报，2004(7)

3. [美]波利亚. 怎样解题. 北京：科学出版社，1982

4. 解恩泽. 赵树智. 数学思想方法纵横论. 北京：科学出版社，1987

5. 河南高师院校数学教育研究会. 数学方法论. 郑州：河南教育出版社，1996

6. [荷兰]弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学. 陈昌平等译. 上海：上海教育出版社，1995

7. 高隆昌. 数学及其认识. 北京：高等教育出版社，2005

8. 王仲春等. 数学思维与数学方法论. 北京：高等教育出版社，1989

9. 杨世明，王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛：青岛海洋大学出版社，2000

10. 周春荔，张景斌. 数学学科教育学. 北京：首都师范大学出版社，2003

11. 解恩泽，徐本顺. 数学思想方法. 济南：山东教育出版社，1989

12. 林夏水. 数学哲学. 北京：商务印书馆，2003

13. 王子兴. 数学方法论问题解决的理论. 第二版. 长沙：中南大学出版社，2002

第三章　数学解题的方法——化归方法

化归方法为数学家们常用方法，因为它是数学学习的一种有效方法. 不少学者和一些数学成绩突出的学生，都有这么一条比较有益的经验：把“未知的问题”化为“已知的问题”，新鲜问题化为“学过的问题”去解决，也就是运用化归方法. 本章就对化归方法的思想、化归思想的策略进行一些认识和学习.

§1　化归方法的基本概念

一、化归方法的概述

化归方法如此有效，那么什么是化归方法？化归方法的基本思想是什么？钱佩玲教授在《数学思想方法与中学数学》一书中有精辟的阐释：“化归是转化和归结的简称.”基本思想是：“人们在解决数学问题时，常常是将待解决的问题 A，通过某种转化手段，归结为另一个问题 B，而问题 B 是相对较易解决或已有固定解决程式的问题，且通过对问题 B 的解决可得到原问题 A 的解答.”用框图直观表示为图 3－3－1：

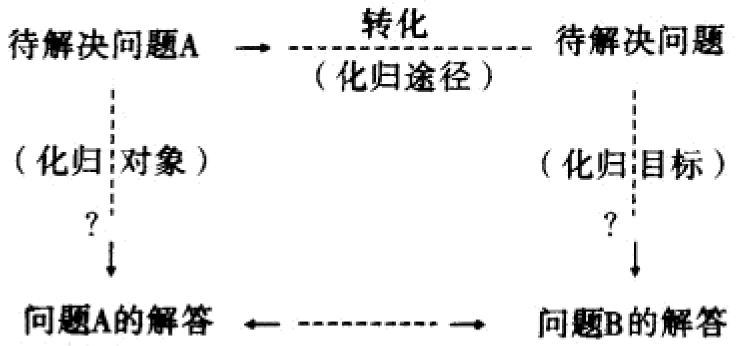


图3-3-1

关于化归法，在数学史上曾有不少数学家从不同角度进行过论述，例如笛卡儿在《指导思维的法则》一书中曾指出如下的“万能方法”：①将任何种类的问题化为数学问题；②将任何种类的数学问题化为代数问题；③将代数问题化归为方程式求解. 这一基本思想导致笛卡儿发明了解析几何，而且今天人们把几何问题的证明过程转化为代数方程组的零点集的确定问题，最后实现用机器证明定理的目标，这是笛卡儿思想在现代的发展和深化. 但是，必须指出，任何方法都具有一定的局限性，笛卡儿的万能方法的“万能”根本不可能. 波利亚指出：尽管“万能方法”不可能适用一切所有场合，但对中学生来说的确为一个“问题解决”的模式. 这也就是说中学数学中解文字应用题正要使用这一模式，自然化归成为中学数学学习的任务之一.

例(3-3-1)　一铁球浮在水银上，若将水倾注在水银之上，并覆盖铁球，这时铁球相对水银面将下沉？上升？还是保持同样的深度？

分析：这是一个物理问题，运用数学来考虑不会满足所谓“上升、下沉、保持同样深度”的定性描述，而是有一种定量分析，计算注入水后，球在水面上的那部分体积与整个球的体积的比例（如

图 3－3－2）：

这个问题与物理中的浮力问题有关. 先将物理问题化为数学问题：

令水银面上液体的密度为 a，水银面下面液体的密度为 b，球的密度为 c，球的体积为 V.

设 x 表示水银面上面球的部分，y 表示水银面下面球的部分列下式：

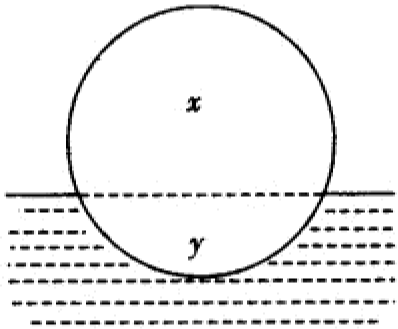


图 3－3－2

$$\begin{cases} ax + by = cy \\ x + y = v \end{cases}$$

解得：$x = \dfrac{b-c}{b-a}v, y = \dfrac{c-a}{b-a}v.$

回到原题：注水前，$a = 0, b = 13.60, c = 7.84$，由此 $x = 0.432v$；注水后，$a = 1, x = 0.457v$，故知注水之后球浮于水银上部分与球的总体之比增大，即球面上升.

例(3－3－2)　初等代数中的方程的分类如图 3－3－3.

- 方程
  - 代数方程
    - 有理方程
      - 整式方程
        - 一次方程
        - 二次方程
        - 高次方程
      - 分式方程
    - 无理方程
  - 超越方程
    - 指数方程
    - 对数方程
    - 三角方程
    - 反三角方程

图 3－3－3

解一元代数方程，在四次和四次以下的一元整式方程都有一

般解法，且有其求根公式. 人们最熟悉解一元代数方程，最基本的是要掌握一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$ 和一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的解法. 解一元分式方程和一元无理方程的基本方法都是通过适当的变形将其转化为整式方程. 对于五次或五次以上的一元代数方程，不存在一般根式解，只能局限于特殊类型代数方程求根. 那么对于一元代数方程的求根，只能局限于转化为解一些特殊类型的方程. 我们常见的最简超越方程的类型有：①最简指数方程 $a^x=c(a>0,且\ a\neq 1)$；②最简对数方程 $\log_a x=c(a>0,且\ a\neq 1)$；③最简幂函数方程 $x^\alpha=c(\alpha$ 是实数)；④最简三角方程 $\sin x=c$、$\cos x=c$、$\tan x=c$、$\cot x=c$；⑤最简反三角方程 $\arcsin x=c$、$\arccos x=c$、$\arctan x=c$、$\text{arccot}\, x=c$. 初等的超越方程最终化为最简超越方程. 而在解初等超越方程的过程中，又往往将其转化成代数方程的形式去解，最后才转化为最简超越方程的求解. 例如：

(1)解方程 $x^4-25x^2+144=0$ 时，令 $x^2=t$ 将其化为关于 t 的方程，$t^2-25t+144=0$.

(2) $4^x+6^x=9^x$ 两边除 9^x，可得 $\left(\frac{4}{9}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$，

令 $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$ 后化为 $t^2+t-1=0$ 去解.

(3)解方程 $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$ 将方程变形为 $6\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+24=0$ 求解时将 $\left(x-\frac{1}{x}\right)=t$，将其变形为关于 t 的一元二次方程，$6t^2-25t+24=0$ 求解

(4)解方程 $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$

分析：将上式去分母，将其转化成一元二次方程 $x^2-6x+5=0$ 去求解.

(5)解方程 $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3+1}$

分析:将上式去根号,将其转化成一元二次方程 $6x^2-x-5=0$ 去求解.

(6)解方程 $\log_{16-3x}(x-2)=\log_8 2\sqrt{2}$

分析:因为 $\log_8 2\sqrt{2}=\log_8 8^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$,故有 $(16-3x)^{\frac{1}{2}}=x-2$,从而可将其转化成一元二次方程 $x^2-x-12=0$ 去求解.

(7)解方程 $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$

分析:一般地说,凡是可以求解的三角方程,总是通过恒等变形将原方程的求解转化为最简三角方程的求解. 具体到此题,令 $\sin x-\cos x=t$,于是有 $t^2=1-\sin 2x$,从而可将原方程转化为 $t^2+12t-13=0$ 去解. 最后,又将所得 $\sin x-\cos x=1$ 转化成最简三角方程 $\sin 2x$ 去解.

对于解方程组,初等代数局限于研究在一定条件下可按一般法则求解的代数方程组以及某些特殊类型的方程组的解法. 方程组的求解,关键在于消元,即将多元方程转化为一元方程. 对于高次方程,则化归为低次方程. 而对于解超越方程组,其基本途径是将问题转化为代数方程组的求解.

(8)解方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 & ① \\ x^2+y^2-z^2=20 & ② \\ x^4+y^4-z^4=560 & ③ \end{cases}$

分析:求解各种特殊类型的代数方程组的基本途径是将高次方程转化为低次方程,将多元方程化归为一元方程. 具体到此题,可由①得:$x+y=-z$ ④

由②得 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=20+z^2$,

再利用④式,得 $z^2-2xy=20+z^2$.

由③得 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=560+z^4$

于是有:

$$(20+z^2)^2-200=560+z^4$$

$40z^2=360, z=\pm 3$. 因此,将原方程组转化成两个二元二次方程组:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases} \text{与} \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-10 \end{cases}$$

又将此两方程组转化成一元二次方程 $u^2+3u-10=0$ 与 $u^2-3u-10=0$ 去解.

(9)解方程$\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{1}{2} \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$

分析:先将原方程组转化为与它同解的方程组.

$$\text{因为 } \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2y}{2}$$
$$=1-\frac{(\cos 2x+\cos 2y)}{2}$$
$$=1-\cos(x+y)\cos(x-y).$$

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \cos(x+y)\cos(x-y)=\dfrac{1}{2} \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

再将(Ⅰ)转化为代数方程组去求解.

$$\begin{cases} x+y=(2n+1)\pi \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (n\in \mathbf{Z})$$

例(3-3-3) 在微积分中,不定积分的计算方法中有所谓分部积分法.

设函数 $u(x), v(x)$ 具有连续的导数,则

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad ①$$

或写作

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x) \quad ②$$

利用公式①或②有时可以使难求的不定积分$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$转化为易求的不定积分$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$,从而得到所要求的结果.

如,求$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

分析:此题需进行两次分部积分转化成易求的不定积分.

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - \int 2x(-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2(-x\mathrm{e}^{-x} - \int(-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x) \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则 $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C.$

例(3-3-4) 设复数 Z_1 和 Z_2 满足关系式 $Z_1\overline{Z_2} + \overline{A}Z_1 + \overline{AZ_2} = 0$,其中 A 为不等于 0 的复数,试证明

$$\left|\frac{Z_1+A}{Z_2+A}\right| = \frac{Z_1+A}{Z_2+A}$$

分析:这是 1987 年高考题考生失分最多的问题之一. 若将此陌生的问题转化为熟悉的问题,就有利于我们运用熟知的知识、经验与问题去解决. 将此题结合绝对值定义进行思考,再利用我们熟知的实数$|a| = a$ 的充要条件是 $a\geqslant 0$,就会想到改变本题结论,即转化为

"试证 $\dfrac{Z_1+A}{Z_2+A}\in\mathbf{R}$,且$\dfrac{Z_1+A}{Z_2+A}\geqslant 0$",这样问题便可获解.

因为 $Z_1\overline{Z_2} + \overline{A}Z_1 + A\,\overline{Z_2} = 0$

$$\frac{Z_1+A}{Z_2+A} = \frac{(Z_1+A)(\overline{Z_2}+\overline{A})}{(Z_2+A)(Z_2+A)} = \frac{Z_1\overline{Z_2}+\overline{A}Z_1+A\,\overline{Z_2}+A\,\overline{A}}{(Z_2+A)^2}$$

$$= \frac{0 + |A|^2}{|Z_2 + A|^2} > 0(因为 A \neq 0)$$

例(3－3－5)　如图 3－3－4，高为 h 的等边圆锥内，有 3 个等半径且两两相切的球，又每个球都和圆锥的底面和侧面相切，求这 3 个球的半径 r.

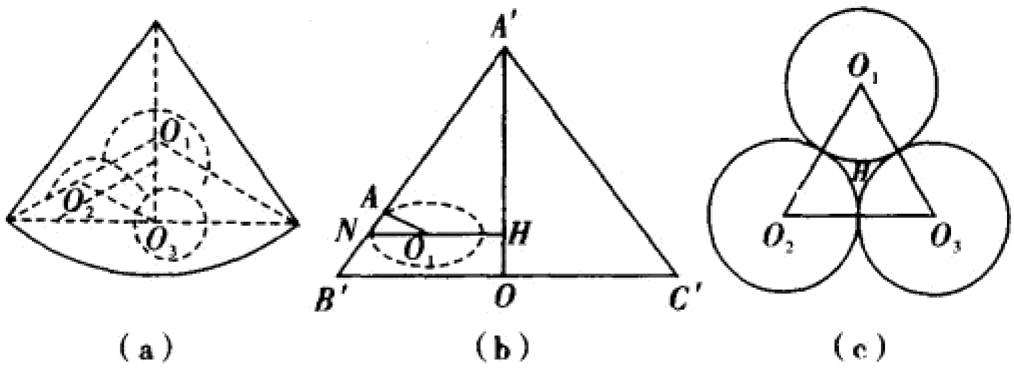


图 3－3－4

分析：为了把较复杂的问题转化为较简单的问题来解，在解立体几何问题时，往往通过降维把三维空间复杂的问题化归为二维空间简单的问题去研究，从而使立体几何问题顺利得到解决.

此题可通过一个小球的球心 O_1 作出等边圆锥的轴截面 $A'B'C'$（图 3－3－3(b)），如此可借助于轴截面将空间图形解剖，使立体几何问题转化为平面几何问题.

过 O_1 作 $NH /\!/ B'C'$，连 O_1A（A 为切点），由图 3－3－3(c)知 $O_1H = \frac{2}{3}\sqrt{3}\ r$，$O_1N = \frac{r}{\sin 60°} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\ r$ 及 $A'H = h - r$，$NH = \frac{\sqrt{3}}{3}A'H = \frac{\sqrt{3}}{3}(h - r)$，因为 $NH = O_1H + O_1N = \frac{4}{3}\sqrt{3}\ r$，故 $\frac{\sqrt{3}}{3}(h - r) = \frac{4}{3}\sqrt{3}\ r$，得 $r = \frac{1}{5}h$.

二、化归的一般原则

1. 化归方向的熟悉化原则

化归的方向朝着熟悉化，把生僻的问题转化为熟悉的问题．这里的熟悉指的是“已知”的或已掌握的“知识”和“方法”．“新”东西化作原有的“旧”东西，就可以认为问题已经基本解决了．

如：$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$，其中 a、b、c 是非零常数，且 $a\neq\pm b$，求函数 $f(x)$的表达式．

分析：由等式的特点，遵循熟悉化法则，把问题转化为熟悉的方程和方程组问题，就变得容易了．

已知 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$ ①

用$\frac{1}{x}$代替 x 有：$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{c}{x}$ ②

令 $f(x)=X$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=Y$，于是①、②可为：

$$\begin{cases} aX+bY=cx & ③ \\ aY+bX=\frac{2}{x} & ④ \end{cases}$$

这样把求①、②中的$f(x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$变为求③、④中的 X、Y，即变为解二元一次方程组了．

2. 化归目标的简单化原则

化归目标简单化原则是指化归应朝着目标简单的方向进行，即复杂的待解决问题应向简单的较易解决的问题化归．这里的简单不仅是指问题结构形式表示上的简单，而且还指问题处理方式、方法上的简单．简单也具有相对性，如解方程问题，在初学一元一次方程的内容时，形如 $ax=b$ 式的方程是简单的，而那些不

是这种形式的方程相对就是复杂的了.解方程时,化归的目标就是通过把含未知数 x 的项移到一边,常数项移到另一边,合并后而使原方程呈简单形式 $ax = b$.这部分内容学习完并掌握之后,再学习方程组及分式方程时,所有一元一次形式的方程都可认为是简单的了,当有关方程内容学完并掌握之后,方程问题就可认为是简单的了,那么,若遇到某些求值或求解问题时,我们就可以考虑向方程问题化归,只要将求值或求解对象纳入到某个方程(组)中,我们就基本上可以说问题解决了,因为方程问题对我们而言已是简单问题.

3. 具体化原则

是指化归的方向一般由抽象到具体.也就是在分析问题、解决问题时,向着简单化的方向转化,使得其中的数量关系更易于把握;尽可能使抽象的形式用具体的方式表述,使用"形"来表述,使得多种概念以及概念间的关系具体明确.

例如:求函数 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ 的最大值.

分析:可以发现,上述函数式可变形为

$$f(x) = \sqrt{(x^2-2)^2 + (x-3)^2} - \sqrt{(x^2-1)^2 + x^2}$$

这样可以将 $f(x)$ 看作:(x, x^2) 到点 $A(3,2)$,$B(0,1)$ 距离差的最大值,进一步具体化(如图3-3-5)实际是求抛物线 $y = x^2$ 上 P 使得 $|PA| - |PB|$ 距离差最大.由图 3-3-5 可知直线 AB 与抛物线相交于 C 点,由"三角形两边之差小于第三边"可知,当 P 位于 C 时,使得 $|PA| - |PB|$ 之差最大,即 $f(x)$ 最大,故可求 $f(x) = |AB| = \sqrt{10}$ 是最大值.

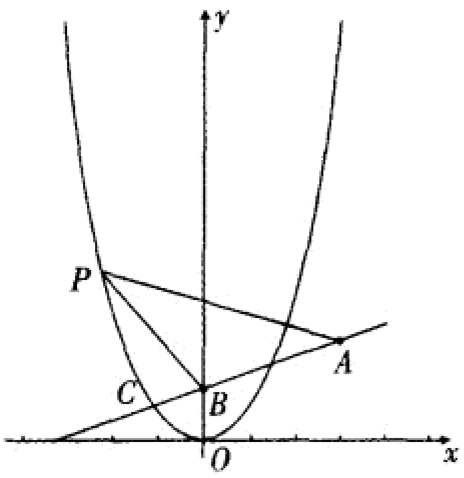


图 3 - 3 - 5

4. 化归标准形式化原则

化归标准的形式化原则是指将问题化为标准化形式. 标准化形式是指已经建立起来的数学模式. 因为人们对于标准形式是熟知的,而且数学是关于模式的数学. 如一元二次方程的求根公式和根与系数关系是关于 $ax^2+bx+c=0$ 的标准化形式而言的,而且二次曲线的有关理论是通过标准方程讨论的,所以一旦将问题化为标准方程,其所有一切性质便清晰起来. 其实"化归标准形式化"是化归方向"熟悉化原则"的外延.

5. 低层次原则

化归的低层次化原则是说,解决数学问题时,应尽量将高维空间的待解问题化归成低维空间的问题,高次数的问题化归成低次数的问题,多元问题化归为少元问题解决. 这是因为低层次问题比高层次问题更直观、具体、简单.

例(3 - 3 - 6)　求方程 $x^3-y^3=xy+61$ 的自然数解 x、y.

分析:由方程结构知,$x>y$,

又由 $x^3-y^3=(x-y)xy+(x-y)(x^2+y^2)$ 知 x 不能比 y 大太多,

考虑用线性代换 $x = y+d$ 降低方程次数. 代入原方程并整理得

$$(3d-1)y^2+(3d^2-d)y+d^3=61,$$

由 $x>y$ 得 $d\geqslant 1$,从而 $3d-1>0$.

又因为 $y>0$,所以,$d^3<61$,$d\leqslant 3$.

因此,d 只有三种可能的取值 $d=1,2,3$.

不难验证,只有 $d=1$ 时,y 才有自然数解,此时 $y=5$,$x=y+d=6$. 因此,原方程的自然数解为 $x=6$,$y=5$.

§2 化归的策略

化归是为解决数学问题提供的一种思想方法. 它在数学问题解决中的作用在于转化,即将解决的(或未解决)问题通过变形、分解、映射手段,最终使之简算化、熟悉化、具体化、正难则反化,直到化作已经解决或比较容易解决的问题中去.

1. 化归的典型范例——费马大定理的证明

在中国勾股定理的基础上,在《易髀算经》的另一处,周公后人陈子的一句话:"勾股各自乘,并而开方除之". 即现代数学符号表述的 $x^2+y^2=z^2$. 由此可见陈子已知道一般的勾股定理,后来,公元三世纪,赵爽为《周髀算经》注释时并对勾股定理进行了证明. 勾股定理西方称为"毕得哥拉斯定理."再后来法国数学家费马在读拉丁文丢番图的《算术》时,在第二卷的第 8 命题"将一个平方数分成两个平方数之和"旁边写下一段话:"另一方面,不可能有一个数的立方表为另外两个立方之和,一个数的四次方表成另两个四次方之和. 一般来说,不可能有一个更高的方幂表成另外两个相应方幂之和". 这就是后来所称的"费马大定理":"方程 $x^n+y^n=z^n$,对任意大于 2 的自然数 n 无整数解."1994 年费马大定理由法国数学家怀尔斯获证,他也先后获得沃尔福奖和菲尔茨奖,但我们这里要说的是费马定理证明过程使用了化归法. 费马

大定理这个命题从问世到证明,经历了近 300 年时间.

18 世纪欧拉证明 $n = 3$ 时的情形.

1839 年法国数学家拉梅证明了 $n = 7$ 的情形.

1844 年高斯的学生库默尔在高斯证明 $n = 7$ 的情形失败后,证明了费马大定理中涉及的一个关键问题——"惟一因子分解定理",并为此创造了理想数,证明了:对于所有小于 100 的素整数费马定理成立. 自从库默尔在费马大定理证明方面有所建树,在他之后一百年时间内费马大定理的研究停滞不前.

1983 年德国数学家法尔廷斯证明了莫代尔猜想:"$x^n + y^n = 1$ 至多只有有限多个有理数解."因此导出结论:"$x^n + y^n = z^n$"至多只有有限多个有理数解. 法尔廷斯把无数多个解的可能性,降低为只有有限多个.

1955 年其间出现了谷山—志村猜想:"有理数域上的椭圆曲线都是模曲线". 关于椭圆曲线即形如 $y^2 = f(x)$ 的曲线,($f(x)$ 是 x 的三次或四次多项式.)当时没有人想到谷山—志村猜想会与费马大定理有联系,是德国数学家弗雷指出了二者的联系,并形成了弗雷命题.

1985 年德国数学家弗雷提出了弗雷命题:假定费马大定理不成立,即存在一组非零整数 A、B、C,使得 $A^n + B^n = C^n (n > 2)$ 那么构成的形式 $y^2 = x(x - A^n)(x - B^n)(n > 2)$ 的椭圆曲线,不可能是模曲线.

显然费雷命题与谷山—志村猜想是矛盾的,如果同时证明这两个命题,就可证明"费马大定理不成立"这一假定是错误的,从而就可证明了费马大定理. 这就是说:把费马大定理的证明转化为对谷山—志村猜想和费雷命题的证明. 其间 1986 年美国数学家贝特证明了弗雷命题. 这样证明费马大定理就化作对谷山—志村猜想的证明. 1994 年怀尔斯证明了这一猜想的成立,这就是说英国数学家怀尔斯(A. Wiles)证明了谷山—志村猜想成立. 这一

成果实际上宣告了费马大定理得到证明. 费马大定理最终得以证明,显示出化归思想的作用.

今天,把费马大定理的证明作为化归法的典型范例.

2. 化归的策略

(1)恒等变形　这种化归体现在等价转换思想,其表现形式很多:如初等数学中的多项式的恒等变换,有理式的恒等变换,分式的恒等变换,三角恒等变换,对数式的恒等变换,反三角式的恒等变换等.

例(3-3-7)　求证$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

分析:因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$

则　$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$

$10+2\sqrt{21}<20$

$2\sqrt{21}<10$

$\sqrt{21}<5$

$21<25$

例(3-3-8)　已知 $\log_{18}^{9}=a, 18^{b}=5$. 求 $\log_{35}^{45}$

分析:此题利用恒等化归可奏效.

因为 $18^{b}=5$　即 $\log_{18}^{5}=b$,已知 $\log_{18}^{9}=a$

$$\log_{36}^{45}=\frac{\log_{18}^{45}}{\log_{18}^{36}}=\frac{\log_{18}^{5}+\log_{18}^{9}}{\log_{18}^{4}+\log_{18}^{9}}$$

$$=\frac{a+b}{\log_{18}^{4}+a}=\frac{a+b}{2\log_{18}^{2}+a}$$

而 $\log_{18}^{2}=1-\log_{18}^{9}$

$=1-a$

把 $\log_{18}^{2}$ 化为已知,问题即可解决.

例(3-3-9)　解方程 $\sin x+\cos x-2\sqrt{2}\sin x\cos x=0$

分析:引进 $t = \sin x + \cos x$

$2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = t^2 - 1$

那么原式可化为 $t + \sqrt{2}(t^2 - 1) = 0$

$$\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0$$

……

(2)放缩变形　不等式的证明中,常常使用放缩变形.

例(3-3-10)　求证 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

分析:因为 $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$

证明:左 $> 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots\cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] = 2(\sqrt{n+1} - 1)$

从上例可看到,不等式证明中放缩变换法,用"放大或缩小分母"的方法和"设掉一些正项而使不等式多项之和变小"等方法,使之达到化归的目的.这是使用不等式的传递性 $a \leqslant b, b \leqslant c \Rightarrow a < c$发展而成的,是不等式的转化思想.

3.分解法

通过分解(类似生物学中的解剖),能清晰地了解待处理问题内部的各种制约关系,从而找到一个解决问题的办法;通过分解,能弄清问题的外延,从而知道我们应该从哪些方面入手去解决问题.因此,分解对于"问题解决"中的化归是至关重要的.但在许多情况下,为使化归过程的完全实现,往往还要重新组合.

这种化归方法是"化大为小,化繁为简"转化思想的体现.其模式可用图 3-3-6 表示:

(1)整体分解法　这是把问题本身作为被分解的对象.有两种表现形式:其一,把问题分解成几个局部之和(称为局部法);其二,把问题分解成整体与局部之差(称为补集法).

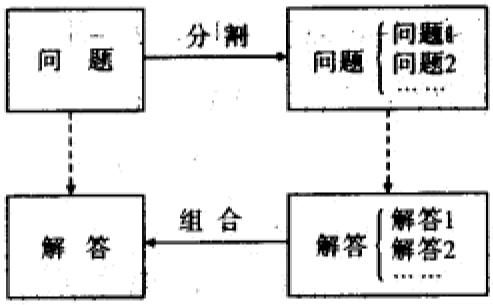


图 3－3－6

例(3－3－11)　①凸 n 边形可以分割为 $n-2$ 个三角形，从而得出 n 边形的内角和是 $(n-2)\times180°$（局部法）.

②弓形面积可以化归为扇形面积与三角形面积之差（补集法）.

③圆台（棱台）的体积可以化归为两个圆锥（棱锥）体积之差（补集法）.

④组合数学中称之为包含排斥原理的计算公式，是补集思想的具体运用.

例(3－3－12)　(1987 年全国高考试题)三棱锥 $P—ABC$ 中，$PA\perp BC$，且 $PA=BC=l$，PA,BC 的公垂线 $ED=h$，求证 $V_{P-ABC}=\frac{1}{6}l^2h$（图 3－3－7）.

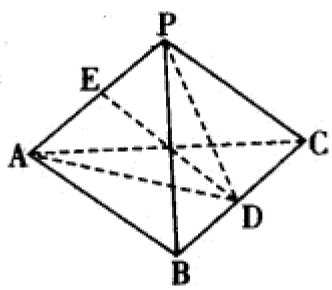


图 3－3－7

分析：直接求出 V_{P-ABC} 比较困难，但已知 $PA\perp BC$，$ED\perp BC$，则有 $BC\perp$ 平面 APD，可将整体分割为 $B—ADP$，$C—ADP$ 两部分遂可求出.

(2)外延分解法　外延划分为几种情形，类似逻辑学中的“分类”. 把一个大的概念分为若干类. 当然分类时应遵循分类的规则.

例(3－3－13)　说明函数 $y = ax^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上是否有单调性，若有，是增函数或是减函数？

分析：函数 $y = ax^2$ 中的 a 待定，a 分三类情形：$a > 0$，$a = 0$，$a < 0$，因此此题分为三种情形去做.

这样主要目的是为弄清求解问题应从哪几方面着手.

(3)条件分解法　这里对已知条件进行分解，使它们能暂时解除它们之间的新旧关系，使它们更便于对问题的思考.

例(3－3－14)　给出一个三角形三条边长 a、b、c，求作这个三角形(尺规作图).

分析：求作三角形，实质是找三角形顶点的位置，作线段 $AB = a$ 使找到三角形的两个顶点，从而转化为“已知 B、A 的位置，求作点 C，使 $|CA| = b$，使 $|CB| = a$”

波利亚居高临下，指出这个问题解法容易，重要的是其蕴含着有 a，b 的双轨迹模式：①把问题转化为求作一个点；②把条件分割为两部分，使每一部分变成未知点所在的轨迹，这样满足条件的轨迹的变点即所求.

双轨迹的模式推广到一般 m 轨迹模式($m \in \mathbf{N}^+ m > 2$)

例(3－3－15)　已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$s_n = 40$，$a_n = 13$ 且最大，$a_n \in \mathbf{N}^+$，求这个数列的项数 n.

分析：由题意设首项为 x，

有：$\dfrac{(13+x)n}{2} = 40$，

即 $n(13+x) = 80$　　①

又 $13 + x > 13$　　②

$13 + x < 26$　　③

同时满足①②③的整数 n 为 4 或 5.

(4)过程分解　把实现目标的过程进行分割.把这种化归过程分为几步，分为几个小问题(小目标)，一步一步地去达到目标.

每个小问题都是一个子目标，每个子目标都比大目标容易.

例(3-3-16)　已知数列$\{a_n\}$的公差为$d>0$，首项$a_1>0$.

$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}$则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ ________.

分析：①问题化为关于 n 的关系式，由 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}=$

$$\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1\div nd}\right).$$

②求 $n\to\infty$ 时的极限

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+nd}\right)=\frac{1}{da_1}.$$

4. 映射法

映射法，即关系(relationship)映射(mapping)反演(inversion)方法(简称 RMI 方法)，这是在现代数学研究中实现化归的一种重要方法. 与一般的化归方法相比，这种化归方法达到了更高的抽象程度，从而在数学中有更为重要和更广泛的应用. 我国数学家徐利治教授在研究级数反演理论时提出这一方法的，关于映射法的框图如3-3-8：

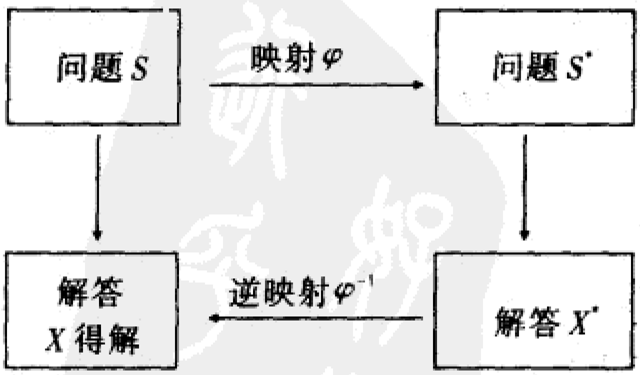


图3-3-8

徐利治教授的关系映射反演法则①：给定一个含有目标原象 x 的关系结构 S，如果能找到一个可定映射 φ（能通过确定的数学方法从映象关系结构系统 S^* 中将目标映象确定出来的映射），将 S 映入或映满 S^*，则可从 S^* 通过一定的数学方法把目标 $X^* = \varphi(x)$ 确定出来，从而通过反演即逆映射 φ^{-1}，便可把 $x = \varphi^{-1}(X^*)$ 确定出来. 如图 3－3－7.

取对数、求导数等方法 φ 称之为映射，取反对数、求积分等方法 φ^{-1} 称之为逆映射.

RMI 原则是我们寻找具体映射遵循的原则. 如双二次方程 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$，当选择 $x^3 \mapsto y$，映象关系 R^* 既不好确定，也不易处理；当选择 $x^4 \mapsto y$，映象关系好确定，但关系复杂，出现开方. 只有按 RMI 法则，选择 $x^2 \mapsto y$，映象关系既好确定又易把握.

5. 函数法

中学数学中，映射是一种特殊的对应，而函数只不过是具有以下两个特点的一种特殊的映射 $f: A \to B$；(i) 集合 A、B 是非空的数的集合；(ii) $f: A \to B$ 是集合 A 到集合 B 上的映射.

初等函数的关系结构系统容易定映，并且一般情形下通过反函数或函数性质的处理，反演也是能行的. 于是，把一个关系结构系统映射为有关函数的关系结构系统，就成了一种重要的化归方法. 这种映射法就是所谓函数法.

(1) 数与形映射

例(3－3－17)　求函数 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ 的最大值.

分析：$f(x)$ 可变形为

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 2) + (x - 1)^2} - \sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2}$$

---

① 徐利治. 数学方法论选讲. 武汉：华中工学院出版社

这样给它放坐标系中$f(x)$就是(x,x^2)到$A(1,2)$、$B(0,1)$两点的距离差的最大值，再进一步求：$y=x^2$上一点P使$|PA|-|PB|$最大，很容易知道，直线AB与$y=x^2$交点C到AB的距离最大，最后因C、A、B在一直线上，所以最大值是$|AB|$，$AB=\sqrt{10}$

通过坐标系可以把代数问题化为几何问题，有时通过几何方法解决代数问题会变得简单；几何问题化为代数问题，也更容易获得几何问题的结论.

(2)函数法　中学中的映射，是函数概念，即两个非空集合A，B若集合A中的任一个元素按照一定的规则f对应着集合B中的惟一元素$f:A\to B$，即称集合B是集合A的函数，如果映射是一一映射，反演也是可行的.

例(3-3-18)　(IMO-29中国集训选拔题)设A、B、C是实数，试述不等式

$$A(x-y)(x-z)+B(y-z)(y-x)+C(z-x)(z-y)\geqslant 0 \quad ①$$

对于任何x、y、z都成立的必要条件.

分析：将①改为

$$A(x-y)^2-B(B-A-C)(x-y)(y-z)+C(y-z)^2\geqslant 0 \quad ②$$

由②式：令$t=\dfrac{x-y}{y-z}(y\neq z)$得

$$At^2-(B-C-A)t+C\geqslant 0 \quad ③$$

这样把③看似t的二次函数去讨论

$$\begin{cases}A<0\\ \Delta=(B-A-C)^2-4AC\leqslant 0\end{cases}$$

整理即可.

参考文献

1. 钱佩玲,邵光华. 数学思想方法和中学数学. 北京:北京师范大学出版社,2001

2. [美]波利亚. 怎样解题. 北京:科学出版社,1982

3. 关成志主编. 数学思想概论. 沈阳:辽宁教育出版社,1993

4. 解恩泽,赵树智. 数学思想方法纵横论. 北京:科学出版社,1987

5. 王仲春,李元中,顾莉蕾等. 数学思想与数学方法论. 北京:高等教育出版社,1989

6. 戴维·韦尔斯. 数学与联想. 李志光译. 上海:上海教育出版社,2000

7. 河南高师院校数学研究会. 数学方法论. 郑州:河南教育出版社,1996

8. 王子兴. 数学方法论——问题解决的理论. 长沙:中南大学出版社,2002

9. 张顺燕编著. 数学的源与流. 北京:高等教育出版社,2003

10. 周春荔,张景斌. 数学学科教育学. 北京:首都师范大学出版社,2003

11. 张奠宙,宋乃庆主编. 数学教育概论. 青岛:高等教育出版社,2004

12. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

第四章　数学中的推理与证明方法

思维是人对事物的一般性与规律性的一种间接的、概括的反应过程，这是一个复杂而高级的心理过程．对于思维，列宁说，任何科学都应用逻辑，但在数学中的逻辑推理证明与其他学科的证明有着本质不同，它有着形式化的特点．根据逻辑的程式化特点，思维分为逻辑思维和非逻辑思维．本章针对逻辑思维的推理、证明方法进行探讨．

§1　推理与推理方法

推理是由一个或几个判断得到一个新的判断的思维形式．每个推理都是由前提和结论两部分组成，已知的判断叫推理的前提，得到的新判断叫推理的结论．推理的种类分为：类比推理、归纳推理、演绎推理等．

推理有内容和形式两个方面：内容指前提和结论的真假性问题；形式是指推理结构形式的问题．关于内容和形式，在形式逻辑中只研究推理的形式，不涉及推理内容，而数学推理则二者兼顾，不仅要求内容真实，同时，也要求必须合乎逻辑．

1．类比推理

类比推理，是根据两个（或两类）对象之间在某些方面的相似

或相同，从而推出它们在其他方面也可能相似或相同的一种逻辑推理方法，它既包含从特殊到特殊，又包含从一般到一般的推理．其特点是：利用某些客观事物间的相似性以对一个系统的研究作为获得关于另一个系统的信息的手段．推理前提所提供的仅仅是两个（或两类）事物的一些相同点，以此为据，进而推出另一属性也相同．其推理根据是不充分的，它无法保证已知相同的属性和推出的属性之间有必然的联系．所以，它是一种或然推理．

(1)类比推理的类型及特点

1)类比推理的类型

第一类：简单共存类比，它是根据对象的属性之间有简单共存关系而进行的推理．

甲对象具有属性 a、b、c、d

乙对象具有属性 a、b、c

则　乙对象可能也具有属性 d

这个类推公式中，a、b、c 表示两个（类）对象的相同（似）属性，而 d 表示推移属性．

第二类：因果类比，它是根据对象的属性之间可能具有同一种因果关系而进行的推理．

甲对象中，属性 a、b、c 同属性 d 有因果联系

乙对象中，属性 a′、b′、c′与 a、b、c 相同或相似

则　乙对象可能有属性 d′(d′与 d 相同或相似)

比如三角形（甲对象）中，三条中线交于一点且分点分每条线为2:1，四面体（乙对象）中，四条中线（顶点至对底面重心联线）属性同前面三条中线类似，因此推理出以下可能成立的结论：这四条中线交于一点，且分点分每条中线为3:1（经证明这结论是正确的）．

第三类：对称类比，它是根据对象属性之间有对称性而进行的推理，比前两类更可靠些，但一事物的对称关系不一定恰好适

合另一对象.

第四类:数学相似类比逻辑中称协变类比. 它是根据对象属性之间具有某种确定的协变关系,即函数变化关系而进行的推理. 由于它定量地描述了对象属性之间的关系,因此比前类类比前进了一大步. 这种类比推理有两种形式:①根据两个对象有若干属性相似,且在二者的数学方程式相似的情况下,推出它们在其他属性方面可能相似.

甲对象具有属性 a、b、c 且对甲有 $f(x)=0$

乙对象具有属性 a′、b′且对乙有 $f(x')=0$

由于 $f(x')=0$ 与 $f(x)=0$ 相似,

所以乙对象可能有属性 c′. ②根据两个对象的各种属性在协变关系中的地位与作用相似,推论出它们的数学方程式也可能相似.

甲对象具有属性 a、b、c 且对甲有 $f(x)=0$

乙对象具有属性 a′、b′、c′

由于属性 a、b、c 与 a′b′c′相似,

所以对乙可能有 $f(x')=0$

第五类:综合类比,它是根据对象属性的多种关系的综合相似而进行的推理.

甲属性 a、b、c、d 及它们之间的多种关系与乙属性 a′、b′、c′、d′及它们之间的多种关系相似. 由 a、b、c、d 的量值可能推出 a′、b′、c′、d′的相应量值.

2)类比的特点　①类比是从人们已经掌握了的事物的属性,推测正在研究的事物的属性. ②类比是从一种事物的特殊属性推测另一种事物的特殊属性. ③类比的结果是猜测性的,不一定可靠,但它却具有发展功能.

徐利治教授对归纳与类比在从事数学创造性科学研究活动过程中的作用作了充分肯定,画了如图 3－4－1 的框图.

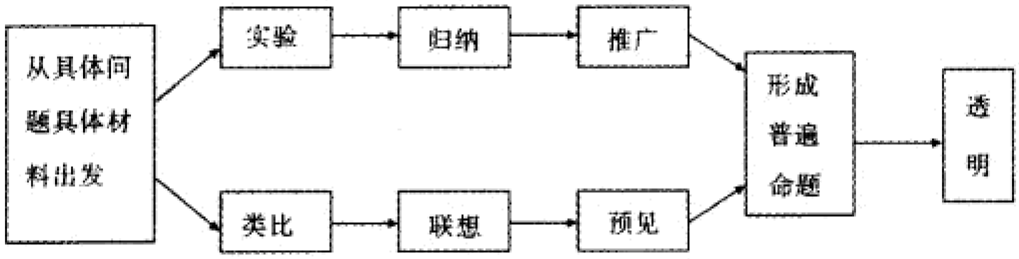


图 3－4－1

(2)类比推理的作用

1)类比是对知识进行理线串点,融会贯通的好办法　高深的数学理论,基本“思路”却可以从初等数学中找到,如平面几何、线性代数与泛函分析有关知识的类比见表 3－4－1,能使我们加深对高等数学的理解与认识.

表 3－4－1　相关知识类比

平面几何	线性代数	泛函分析
长度 $\Vert X\Vert = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$	n 维空间中点到原点之距 $\Vert X\Vert = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	定义在〔0,1〕上的全体连续函数集合〔0,1〕的内积 $(X,Y) = \int_1^{\sigma} x(t)y(t)\mathrm{d}t$ $\Vert X\Vert = \sqrt{\int_0^1 [x(t)]^2\mathrm{d}t}$
余弦 $\cos\theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\Vert X\Vert\cdot\Vert Y\Vert} = \dfrac{(X.Y)}{\Vert X\Vert\cdot\Vert Y\Vert}$	$\cos\theta = \dfrac{(X.Y)}{\Vert X\Vert\cdot\Vert Y\Vert}$	$\cos\theta = \dfrac{(X.Y)}{\Vert X\Vert\cdot\Vert Y\Vert}$

续表 3-4-1

平面几何	线性代数	泛函分析
不等式 $\|(X.Y)\| \leqslant$ $\|X\| \cdot \|Y\|$	$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right\| \leqslant$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$	$\left\|\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant$ $\sqrt{\int_0^1 x^2(t)\mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^1 y^2(t)\mathrm{d}t}$

又如平面几何与立体几何的类比,有利于化难为易,启迪思维,正如波利亚所指出的:"类比是一个伟大的引路人,求解立体几何问题往往有赖于平面几何中的类比问题."(波利亚《怎样解题》1982 年版第 129 页)

例(3-4-1) ①证明:三角形的面积等于三角形的周长与内切圆的半径积的$\frac{1}{2}$.

②证明:棱锥的体积等于棱锥的全面积与内切球的半径乘积的$\frac{1}{3}$.

2)类比富于创造性 拉普拉斯说:"甚至在数学里,发现真理的主要工具也是归纳和类比."(摘自《数学与研究》(中学数学),1984 年,第 2 期.)

例(3-4-2) 数学家欧拉用类比方法猜想$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{\pi^2}{6}$的过程给人们以启发,他的基本思想是拿三角方程与代数方程类比,从而大胆回答了当时无人回答的难题,他的"思路"是:

①设代数方程

$a_0-a_1x^2+a_2x^4-\cdots\cdots+(-1)^n a_n x^{2n}=0$ 有 $2n$ 个不同的根 $\pm x_1, \pm x_2 \cdots\cdots \pm x_n$,

则 $a_0 - a_1x^2 + a_2x^4 - \cdots\cdots + (-1)^n a_n x^{2n}$

$$= a_0\left(1-\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{x_2^2}\right)+\cdots\cdots+\left(1-\frac{x^2}{x_n^2}\right).$$

比较两边的 x^2 的系数，得：

$$a_1 = a_0\left(1+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_n^2}\right).$$

②三角方程 $\sin x = 0$，有无穷多个根：$0, \pm\pi, \pm 2\pi\cdots\cdots$

则 $$\sin x = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)+\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)+\cdots\cdots = 0 \tag{1}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\cdots$$

欧拉抛去0这个根，用 x 除这个方程两边得：

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\cdots\cdots = 0 \tag{2}$$

比较(1)(2)式中 x^2 的系数，得：

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\cdots = \frac{1}{3!}$$

则 $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

这种结果虽不严格，但思路奇特，富于创造性. 当然，今天的数学分析证明这个公式是很简单的，但当时运用这种大胆类比很不容易.

③借用简化的类比形式，可望形成有关问题答案的猜想，从而达到有用的探索方向.

例(3－4－3) 已知 $x+y+z = x\cdot y\cdot z$，求证：

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

考虑到直接证明困难，但通过细分析左端每一个分式，与二倍角的正切公式：

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

的右端相似，于是联想到可用三角函数换元法证.

证明：设 $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$

则等式左端 $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} + \frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$$= \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C$$

$$= \tan 2A \cdot \tan 2B \cdot \tan 2C$$

$$= \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$$

则　恒等式成立.

二、归纳推理

人们认识事物的过程，总是通过各种手段（观察、实验、分析、比较等）认识许多特殊现象，然后达到对一般现象的认识. 归纳就是从特殊的具体的认识推进到一般现象的认识的一种思维过程. 归纳是科学发现中常用的思维方式，归纳推理可以分为：完全归纳法和不完全归纳法.

1. 归纳法的特点

(1) 归纳是依据特殊现象推断一般现象，因而，由归纳所得的结论，超越了前提所包含的内容.

(2) 归纳是依据若干已知的不完全的现象推断尚属未知的现象，因而结论具有猜测的性质.

(3) 归纳的前提是单个的事实、特殊的情况，所以归纳是立足于观察、经验或实验的基础上的.

由归纳推理所得的结论虽然未必是可靠的，但它由特殊到一般，由具体到抽象的认识功能，对于科学的发现却是十分有用的. 观察、实验、对有限的资料作归纳整理，提出带有规律性的说法，

乃是科学研究的最基本的方法之一.

例如多面体的面数 F、顶点数 V 和棱数 E 之间有什么关系呢？应从何处着手来研究这个问题呢？最容易下手的莫过于拿几个多面体来，具体地数一数它们的面、顶点和棱，于是便产生了下面的表，见表 3-4-2.

表 3-4-2　不同多面体间各量的数目表

多面体	面数(F)	顶点数(V)	棱数(E)
立方体	8	8	12
三棱柱	5	6	9
五棱柱	7	10	15
方锥	5	5	8
三棱锥	4	4	6
五棱锥	6	6	10

在分析这些特例数据的基础上就可归纳出一个结论：

$$F + V = E + 2$$

尽管这时还不能认为这个结论就是正确的，但是它毕竟为我们提供了一个研究的方向，即根据这个结论再去证实它符合一般多面体的情形.

2. 归纳的类型

(1)完全归纳法的推理方法　在数学中它可分为穷举归纳法与类分法两种.

1)穷举归纳法　穷举归纳法是数学中常用的一种完全归纳法. 它是对具有有限个对象的某类事物进行研究时，把它所有的对象的属性分别讨论，当肯定了它们都有某一属性，从而得到这

类事物都有这一属性的一般结论的归纳推理.

如被考察的全部对象是 $S = \{S_i | i = 1,2,\cdots,n\}$,考察内容是判定 S 是否有性质 P. 用通常的符号可表示为:

因为 S_1——P

S_2——P

……

S_n——P

(S_1……S_n 是 S 类全部个别事物)

所以 S——P.

2)类分法 在数学中所考察的对象大多数是无穷多的,穷举这种方法很多情况下不适用. 然而,对于有些无限多的对象,如果可将其分为有限的几个类来分别研究,这就是类分法.

所谓类分,用集合语言可定义如下:

定义令 $\pi(S) = \{A_i | A_i \subset S, A_i \neq \Phi, i = 1,2\cdots\cdots n; \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S, A_i \cap B_j \neq \Phi, i \neq j\}$,则称 $\pi(S)$ 为 S 的一个分类,$A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为该分类下的一个类.

在中学数学里有许多需要用到完全归纳法证明的问题. 在证明时,先对研究的对象按前提中可能存在的一切情况作如上所述的分类,再按类分别进行证明. 如每类均得证,则结论就得到了,此即为类分法.

例如在平面几何中研究圆周角定理时,考察了三种可能的特殊情形,即圆心在圆周角的边上、角内、角外,并且对第一种情况都证明了角的度数等于它所对的弧的度数的一半,于是得出结论:"圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半". 这里所用的方法就是完全归纳法. 由于完全归纳法考察了所有的特殊情况,所以归纳出的结论是完全可靠的,这种归纳法在数学上是严谨的.

如果我们在论证时视一类为一个对象，那么类分法也可看为有限类的穷举法. 统一起来，完全归纳法可视为以分类(特殊时，一类只有一个元素，或所有的元素为一类)为基础的一种证明方法.

如果完全归纳法的每一类(个)前提都是真的，那么结论一定是真的，所以，它是一种严格的推理方法. 在数学中可以用来进行证明.

(2)不完全归纳法　在数学中运用完全归纳法往往会遇到困难，这是因为在我们所考察的事物中，有些含有无限多个对象而又不能进行有限的分类，从而不能使用穷举法，所以人们往往只根据部分对象具有某种属性作出概括. 这种根据考察的一类事物的部分对象具有某一属性，而作出该类事物都具有这一属性的一般结论的推理方法称为不完全归纳法.

从数学发展史可以清楚地看到，无论是一个新的数学分支的产生，还是具体给出一个概念的定义，都经历过一个积累经验材料的时期，从大量观察、实验得来的材料发现其规律，总结出数学定理或原理，这是数学工作中最初步的然而又是基本的工作. 高斯说过他的许多发现都是靠归纳法取得的. 不完全归纳法虽然不能作为严密的论证方法，但是它能使我们迅速发现一些数量关系的规律，为我们提供研究方向. 素数分布论中许多著名定理，如素数定理、贝特朗定理、狄里克雷定理等，都是先用不完全归纳法从经验概括出来成为猜想，然后再经严格数学推导，设法给予证明的. 还有更多由不完全归纳法得到的猜想，初步揭示了素数的分布规律，但至今未得到证明，所以数学家十分重视不完全归纳法的作用. 中学教材里从具体数的演算概括出运算律，用的就是不完全归纳法. 在数学中，不完全归纳法又可分为枚举归纳法与科学归纳法.

1)枚举归纳法　枚举归纳法是先找几个特殊对象进行试验，然后归纳出共性特征，最后提出一种比较合理的猜想的推理方

法.它的步骤可概括为“试验——归纳——猜想”,至于要考察多少个特殊对象,那要看具体情况.

枚举归纳推理通常用符号表示为:

因为 S_1——P

S_2——P

……

S_n——P

(S_1……S_n 为 S 类的部分个别事物在枚举中未遇相矛盾的情况)

所以 可能 S——P.

例如:凸多边形的内角和.

三角形的内角和 $180° = (3-2)\times180°$;

四边形的内角和 $360° = (4-2)\times180°$;

五边形的内角和 $540° = (5-2)\times180°$;

……

n 边形的内角和——$(n-2)180°$.

再如等差数列$\{a_n\}$公差为 d,其通项公式.

$a_2 = a_1 + d$;

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$;

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$;

……

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

上述这些用枚举归纳法,得到的结论容易用数学归纳法证明.

2)因果关系归纳法 因果规律的特点,在前后相继的一些现象中,通过某些现象的相关变化,归纳出现象间的因果联系.这种方法叫做因果关系归纳法.大体可分为以下五类.

求同法:从不同场合中找出相同元素,即发现各种条件中只有一个因素是普遍存在的,如 A 就是 a 的原因.

场合	各种条件	被研究对象
Ⅰ	A,B,C	a
Ⅱ	A,D,E	a
Ⅲ	A,F,G	a

所以　A 是 a 的原因

差异法:从两种场合之差异找出因果联系.

场合	各种条件	被研究对象
Ⅰ	A,B,C	a
Ⅱ	B,C	b 或 a 不出现

所以　A 是 a 的原因

求同差异共同法:探讨求同法与差异法二者结合导致因果联系.

场合	各种条件	被研究对象
Ⅰ	A,B,C	a
Ⅱ	A,P,E	a
Ⅲ	F,B	b 或 a 不出现
Ⅳ	M,E	c 或 a 不出现

所以　A 是 a 的原因

共变法:从某一现象变化引起的另一现象的变化中找出两现象的因果关系.

场合	各种条件	被研究对象
Ⅰ	A_1,B,C	a_1
Ⅱ	A_2,B,C	a_2
Ⅲ	A_3,B,C	a_3

所以　A 是 a 的原因

剩余法:在一组复杂现象中,把已知因果联系的现象减去,探求其他现象的原因.

场合	各种条件	被研究对象
Ⅰ	A,B,C	a,b,c
Ⅱ	B	b
Ⅲ	B	c

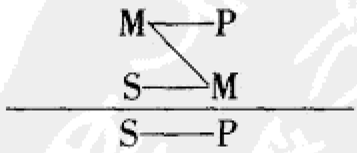
所以　A 是 a 的原因

五种方法中,最基本的是 1 与 2,它们都是发现因果联系的方法.

不完全归纳法的客观基础是个性和共性的对立统一,个性中包含着共性,通过个性可以认识共性,个性中有些现象反映本质,有些则不反映本质,有些属性为全体所共有,有些属性则只存在于部分对象中,这就决定了从个性中概括出来的结论不一定是事物的共性,也不一定抓住了事物的本质.不完全归纳法的客观基础决定了这种推理的逻辑特点:它虽然是一种扩充知识,发现真理的方法,但往往是一种不严密或然性的推理.用不完全归纳法提出的结论,仅仅是一种猜想,它的正确性还要经过严格证明,比如"费马大定理"和费马素数.

3. 演绎推理

演绎推理是由一般性的命题推出特殊性命题的推理方法,演绎推理的主要形式,就是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理,三段论式推理常用的一种格式,可以用以下公式来表示:



它的意义可以简释为:M是P,而S是M,所以S是P.

三段论推理的依据,用集合论的观点来讲,就是:若集M的所有元素都具有性质P,S是M的子集,所以S中所有元素都具有性质P.

三段论的公式中包含三个判断,第一个判断称为大前提,它提供了一个一般的原理;第二个判断叫小前提,它指出了一个特殊情况;这两个判断联合起来,揭示了一般原理和特殊情况的内在联系,从而产生了第三个判断——结论.

在三段论式中的三个判断,每一个判断中都含有且只含有两个概念——习惯上称为名词,每个名词在三个判断中各重复两次,所以实际上在三个判断中有且仅有三个不同的名词,这一点是三段论的特色.

在大小前提中各出现一次,而在结论中不出现的名词叫中词(M);在大前提中除了中词以外的另一个名词,也就是结论的宾词叫大词(P);小前提中的另一个名词,也就是结论的主词叫小词(S),中词的功能是,联结两个前提,揭示大词与小词的关系,提供推出结论的条件.

演绎推理的前提与结论之间有蕴涵关系,因而,只要前提是真实的,推理的形式是正确的,那么结论必定是真实的,演绎推理是一种必然性推理.错误的前提可能导致错误的结论.例如:

指数函数 $y = a^x$ 是递增函数,

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是指函数,

所以,$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是递增函数.

导致结论错误的原因是,大前提一般情况下并不是真实的,指数函数当且仅当底数 $a > 1$ 时才是递增函数,又如

三角函数是周期函数,

$f(x)$不是三角函数，

所以，$f(x)$不是周期函数.

这个结论当然是不可靠的，从逻辑上来分析是推理形式不正确，原因是从“M 是 P”，“S 不是 M”，并不能推出“S 不是 P”.

演绎推理从本质上讲，不能为我们提供新的知识，因为，既然可以从前提推出结论，那么，由结论所表达的思想就必然蕴涵于前提之中了. 尽管如此，演绎推理的作用是不可忽视的. 那么，它的作用表现在：

（1）把特殊情况明晰化　当问题在一般情形下获得了解答，按理来说就已经包括了特殊问题的解答，然而有时一个问题摆在面前，我们并不一定会发现它是什么定理或公式的特殊情形，致使头绪茫然无从想起，因而，我们需要从一般情形下演绎出一些特殊情况，把那些原来不明晰的关系显现出来，使我们的认识具体化、丰富化.

例如，二项展开式：

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + C_n^nb^n$$

显示了一般的规律，但是，它的特殊情形：

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots\cdots + (-1)^nC_n^n = 0$$

$$C_n^0(1-x)^n + C_n^1x(1-x)^{n-1} + C_n^2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots\cdots + C_n^nx^n = 1.$$

如果不把它们与二项式定理联系起来，一下子却是难以认识到的.

（2）把蕴涵的性质揭露出来　在一般性前提中所蕴涵的性质，并非都是容易认识到的，通过演绎推理（当然不只是前面所述的最简单形式的演绎推理）把它们揭露出来，在一定程度上也可以算作新知识.

例如，在三角形的条件下，有许多恒等式及不等式，如

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$，

$$\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=1,$$

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$,等等,只要有前提“$\alpha+\beta+\gamma=\pi$”,借助于有关知识,经过一系列的推理,都可以推出.或说前提“$\alpha+\beta+\gamma=\pi$”蕴涵有这些恒等式及不等式.但这些等式和不等式,在如此简单的前提下,大多是不可能一眼看出来的.因此,它们也可以称为新知识.

(3)有助于科学的理论化和体系化 一门科学发展到一定程度后,必然要回过头来对所积累的材料加以整理,选择那些意义自明的概念作为原始概念,选择那些最简明的、真实的为人们所公认的那些命题作为公理.然后以这些原始概念和公理,作为推理的出发点,推演出其他的事实,把这门科学组成一个由低级到高级,彼此相联系的系统.这个系统就全局来看是用演绎法建立起来的一个演绎系统.最典型的例子就是欧氏几何,它是建立在五组公理之上的演绎系统.

如果把公理系统中的概念、关系,只作纯形式的理解,即与它的原型脱离,只从彼此的联系中去考虑,那么,这样的系统就会具有更一般的意义.

二、演绎推理的局限性

演绎推理是由一般到特殊的推理,所得的结果只是把一般原理中所蕴涵的内容更明显地揭示出来,无论这样的结果使人们在一连串的推理之前怎样难以预料的,它毕竟是蕴涵于已知的一般性原理之中的.

数学是演绎性的科学,但这是就完成了的形式而言的,演绎推理起的是整理事实的作用,它与数学的发展关系不大,彭加勒说:“逻辑学与发现、发明没有关系.”(转引自贝弗里奇:《科学研究的艺术》,科学出版社),这句话虽然说得有些过分,但却明确地

指出了演绎推理作用的局限性.

演绎推理对数学的发现尚且如此,那么,对于和实验紧密联系的自然科学——化学、生物、医学的作用就更要小了.

三、演绎与归纳、类比的比较

归纳、类比都是具有创造性的或然推理,不论是由大量的特例,经过分析、概括,发现一般规律的归纳法,还是由两系统的已知属性,通过比较、联想而发现未知属性的灵活的类比法,它们的共同特点是,结论往往超出前提控制的范围,所以人们称它们是"开拓型"的思维方法. 也正因为结论超出了前提的管辖范围,前提就无力保证结论必真,所以归纳、类比只能是或然性的推理. 演绎法所得的结论完全蕴涵于前提之中,所以,人们称它为"封闭型"或"收敛型"的推理方法,只要前提真实,逻辑形式正确,结论必然是真实的. 但一般情况下,由此不能取得突破性的进展. 演绎推理形式化的程度远比归纳、类比高,即用演绎法时,一个命题由其他命题推出,其根据是命题的形式结构之间的联系,而与这些命题的具体内容无关,这一点由三段论法的形式表示就可以清楚地看到.

§2　证明与证明方法

1. 证明与证明的规则

在一门科学理论中,不仅需要作出各种判断,而且还需要根据一定的事实和理由来说明这些判断的真实性. 这样由一个判断和几个判断的真实性,进而断定另一个判断的真实性的思维方法叫证明. 数学证明是根据已经确定真实性的公理、定义、定理和法则等数学命题,确定某一数学命题的真实性的推理过程,关于证明的结构包括三个组成部分:论题、论据、论证.

所谓论题:就是需要确定其真实性的命题,命题的形式通常为“若A则B”或“已知A,求证B”. 所谓论据:就是用以确定论题的真实性的依据的另一些命题. 论据包括:已知的题设、已知的定义、已知的公理、已知的定理等命题. 所谓论证就是运用论据确定论题真实性的推理过程. 推理和证明是有区别的,但证明和推理是有联系的,证明是为需要证明的论题导出论据,运用推理的方法推出论题中的结论,推理是先有前提,从前题出发推出新结论.

在数学中的证明一般用演绎推理,并且往往是一系列推理. 尤其是几何命题的证明更是如此. 它的每一步都是一个三段论式,或简化的三段论式,它的证明是由一连串的三段论复合而成. 因为是证明,其前提的正确性和推理方法的正确性都是十分必要的. 为此,一个正确的命题必须遵循以下规则:

(1)论题的规则

1)论题必须明确. 论题明确是证明的先决条件,论题不能是含混不清或模棱两可的命题. 例如,“在四边形中,连接四边中点所得的四边形是平行四边形”,由于没有指出如何连接这些中点,因此这是一个不明确的命题.

2)不能转移或偷换论题,例如,我们要证明“四边形的内角和等于360°”,在证明过程中,用一个矩形代替一般的四边形,这就把论题改换为“矩形的内角和等于360°”,犯了偷换论题的错误.

(2)论据的规则

1)论据应当是确知为真的命题,在数学中,定义、公理已经证明的定理、法则等都可以作为论据,如果论据不真实,那就不能确定论题的真实性.

2)论据的真实性不能依赖于论题的真实性,证明论题时,论据的真实性依赖于论题的真实性叫做“循环证明”,这是不许可的,例如,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 这个论题,通常是用勾股定理作为论据来证明的;如果在证明勾股定理时,又用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 作为

论据,那就犯了循环证明的错误.

(3)关于论证的规则

论证是运用论据,一步一步地推出论题的结论的思维过程;前一步必须是后一步的充分条件,否则就是论据不足.

二、直接证法与间接证法

我们要证明某个命题成立,或者直接证明原命题的成立,或间接证明它的等价命题成立. 这样,证明的方法就有直接证法与间接证法.

1. 直接证法

证明命题时,从原命题所给的条件出发,根据已有的公理、定义、定理、法则,通过一系列推理,一直推到所要证明的结论为止,这种证法叫做直接证法. 几何中多数定理都是采用这种方法证明的.

例(3-4-4) 证明三角形的内角和等于180°.

已知:$\triangle ABC$ 如图3-4-2.

求证:$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$.

证明:延长 AC.

(1)从点 C 作 $CD/\!/AB$(过直线外一点可以作该直线的平行线).

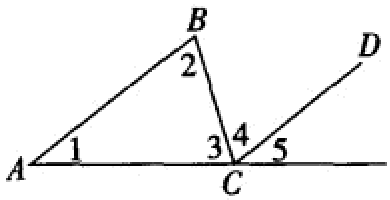


图3-4-2

(2)$\angle 1=\angle 5$(两直线平行,同位角相等).

(3)$\angle 2=\angle 4$(两直线平行,内错角相等).

(4)$\angle 3+\angle 4+\angle 5=180°$(平角定义).

(5)$\angle 3+\angle 2+\angle 1=180°$(等量代换).

(6)$\angle A+\angle B+\angle C=180°$(等量代换).

2. **间接证法**

有些命题往往不易用直接证法去证明，这时，可通过证明它的等价命题的成立，从而原命题必定成立，这种证法叫做间接证法.

在几何里常用的间接证法是反证法，在证明某个命题时，先假定它的结论的否定成立，从这个假定出发，根据命题的题设和已知的公理、定义、定理、法则，经过推理，得出与已知事实（题设、公理、定义、定理）相矛盾的结果. 这样，就证明了结论的否定不成立，因“$A\Rightarrow B$”与“$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$”是逆否关系，是等价命题. 从而间接地肯定了原命题的结论成立，这种证明方法，叫做反证法.

因此用反证法证明命题的一般步骤如下：

1）假设命题的结论不成立，即假设的反面成立；

2）从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

3）由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论的正确性.

例(3－4－5)　证明圆内不是直径的两条相交弦不能互相平分.

已知：$\odot O$ 内不是直径的两弦 AB 和 CD 相交于点 P（图3－4－3）.

求证：AB 和 CD 不能互相平分.

证明：假定 AB 和 CD 互相平分，那么点 P 是 AB 的中点，又是 CD 的中点，又因为 AB、CD 不是直径，P 与 O 不重合，连 OP，于是

$OP\perp AB, OP\perp CD$

这样，过点 P 有两条直线 AB、CD 同垂直于 OP，这与定理“经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线”相矛

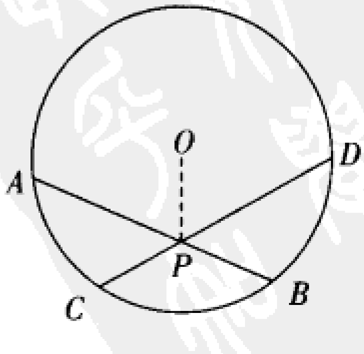


图3－4－3

盾,因而,假定 AB 和 CD 互相平分是不成立的.

所以,AB 和 CD 不能互相平分.

本题的特点是,原命题的结论的否定只有一种情况,只要把这种情况推翻,就可肯定原命题结论的成立,这种较单纯的反证法,叫做归谬法,如果命题的结论的否定不止一种情况,那么就必须把它的所有可能情况一一列举,逐个否定,才能肯定原命题结论的成立,这种反证法叫做穷举法.

例如,在已经证明了等腰三角形底角相等及一个三角形中大边所对的角较大以后,可以证明下面的例 3-4-6.

例(3-4-6) 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle C > \angle B$,

求证:$AB > AC$.

证明:假设 AB 不大于 AC(记作 $AB \ngtr AC$),那么 AB 与 AC 的关系有两种情形:$AB = AC$ 或 $AB < AC$.

如果 $AB = AC$,那么 $\angle C = \angle B$(等腰三角形两底角相等),这和已知条件 $\angle C > \angle B$ 矛盾,所以 $AB \neq AC$.

如果 $AB < AC$,那么 $\angle C < \angle B$(一个三角形中大边所对的角较大),这和 $\angle C > \angle B$ 矛盾,所以 $AB \nless AC$.

既然 $AB \neq AC$、$AB \nless AC$,所以,$AB > AC$.

二、分析法

分析法是抽象思维的基本方法之一. 是人们用来揭示事物本质、了解各事物之间及事物各部分之间内在联系的重要的思维方法.

分析法从方法论的角度讲,就是把研究对象分解为它的各个组成部分、方面、因素、层次,然后分别加以研究,从而认识事物的基础或本质的一种思维方法. 这是方法论中的分析法,也是数学思想方法中的分析法.

从这个基本观念出发,我们把所研究的对象及其分解成的各

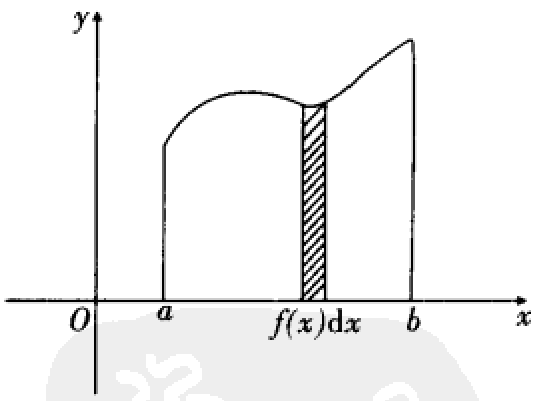
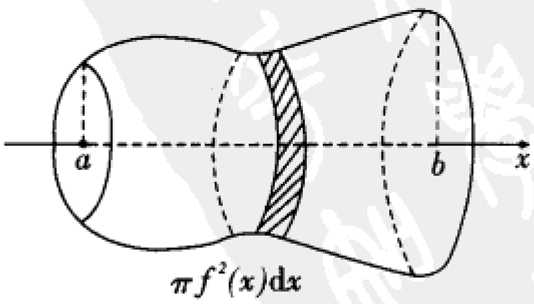
个部分看成是一个集合. 那么,对这个集合中各元素研究顺序的不同,形成不同类型的分析法.

1. 元过程分析法

即从对事物部分的研究,直接去揭示整体规律的思维方法. 例如从某种物理过程或几何形体中抽取任何一小部分进行研究,通过分析小单元的局部中的关系和变化规律,建立整个物理过程或几何形体的数量关系,然后综合之,计算出整体的量.

我们以微积分中的微元法为例列表说明. 见表 3 - 4 - 2.

表 3 - 4 - 2　微元法分析过程

微分公式	整体公式	图　　形
曲边梯形面积 $ds = f(x)dx$	$s = \int_a^b f(x)dx$	
旋转体体积 $dr = \pi f^2(x)dx$	$r = \int_a^b \pi f^2(x)dx$	

这种分析法的关键在于如何从整体中抽出具有一般规律的任何一个小部分. 从上述例子中我们看出,对小部分研究透彻了,便可直接获得整体的结果.

2. **追溯型分析法**

这种分析法,其思路是把所研究的对象看成是一个整体,并假设该事物是存在的(或成立的),进一步分析其组成的各个部分成立的充分条件. 当这些条件找到了(或成立时),显然这些条件就是原事物(或原命题)成立的充分条件. 这就是通常所说的"执果索因"的推理方法.

例(3-4-7)　若 x、y、z 为互不相等的正数,求证:

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}>6$$

分析:把要求证的不等式看成是一个整体事物,并假设其成立. 然后变形(把它分解成一些适当的部分,而且经常要做出多次变形,以便得出能解决问题的一种分解形式),即需证明:

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}>6,$$

进一步组合　$\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)>6,$

那么,原不等式作为一个整体,就可分解成以下三个部分,即

$$\begin{cases}\frac{x}{z}+\frac{z}{x}>2\\\frac{y}{z}+\frac{z}{y}>2\\\frac{y}{x}+\frac{x}{y}>2\end{cases}$$

这三个部分按题设条件是成立的,所以原不等式成立.

3. **构造型分析法**

这种分析法,其思路是把所研究对象中的成立的部分和不明

确的部分都看成是成立的，这样，整个事物也就随之被看作是成立（这就是构造），然后进行探讨、推理，找出不明确部分成立的必要条件，即是整体事物成立的必要条件，也就是通常所说的原命题成立的必要条件.

例(3－4－8)　已知 A、B 为锐角三角形之二内角，求证：$\tan A\cdot\tan B>1$.

证明：锐角 $\triangle ABC$ 见图 3－4－4 就是我们所研究事物的整体，其边、角和由它所涉及的有关线段、比值都是以 A、B、C 为锐角为前提的.

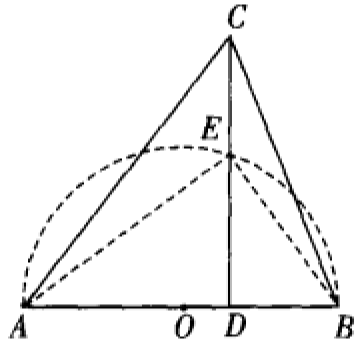


图 3－4－4

考虑到 $\tan A\cdot\tan B$，可作 $CD\perp AB$，则应有

$$\tan A\cdot\tan B=\frac{CD^2}{AD\cdot BD}>1,$$

即 $CD^2>AB\cdot BD$.

我们希望能在 CD 所在直线上找一点 E，使得 $ED^2=AD\cdot BD$，且有 $CD>ED$.

假设这个不明确的部分是成立的，则 E 点应在线段 CD 内. 通过已有的知识和 C 是锐角，我们很快知道 E 点即是以 AB 为直径的半圆与 CD 的交点，且落在 CD 内，即原命题是成立的.

4. 前进型分析法

这种分析法，其思路是从整体事物中已经成立的某一部分出发，运用已有的知识逐步寻找并扩大到其他部分成立的条件，最终寻找到原事物成立的必要条件，也就是原命题成立的必要条件.

例(3－4－9)　设在一个由实数组成的有限数列中，任意 7 个相继项的和都是负数，而任意 11 个相继项的和都是正数，试问，这样的数列最多能包含多少项？

从已明确的部分出发,即

$\because\quad a_1+\cdots\cdots+a_7<0, a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{11}>0$

$\therefore\quad a_8+a_9+\cdots\cdots+a_{11}>0$ ①

顺序往前推进,可得 $a_{11}+a_{12}+\cdots\cdots+a_{14}>0$ ②

①+②则有 $a_8+a_9+\cdots\cdots 2a_{11}+\cdots\cdots+a_{14}>0$.

但$\because\quad a_8+a_9+\cdots\cdots+a_{14}<0\quad\therefore\quad a_{11}>0$.

用同样的方法,顺序往前推进,可得 $a_{12}>0, a_{13}>0$.

因而 $a_{11}+a_{12}+a_{13}>0$,但因为 $a_{11}+a_{12}+\cdots\cdots+a_{17}<0$,

$\therefore\quad a_{14}+\cdots\cdots+a_{17}>0$.

另一方面,从 $a_7+\cdots\cdots+a_{17}>0$ 及 $a_7+\cdots\cdots+a_{13}>0$

可得 $a_{14}+\cdots\cdots+a_{17}>0$,与前矛盾,因此项数≤16.

5. 混合型分析法

这种分析法,其思路是从命题的充分条件出发,用前进型分析法进行的中途,又从命题的必要条件出发,用追溯型分析法追溯到中途,直到两者追到同一中间结果,接近分析全过程. 这种方法称混合型分析法.

例(3-4-10) 已知△ABC 三内角 A、B、C 成等差数列,求证三边满足$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

思路分析可用以下线索:

设$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$,

则 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$.

进而推出$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$,

则得 $a^2+c^2-ac=b^2$.

由 A、B、C 成等差数列知 $B=60°$,进而得:

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$.

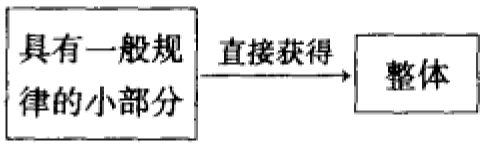
思路接近，整理一下即得完整的证明.

当然，在应用各种不同类型的分析法解决具体数学问题时，还应配合各种可能的有效的其他思维方法，如联想、类比、归纳、演绎等，甚至猜想，那么其作用将可充分发挥. 这是决定于客观事物本身的复杂性.

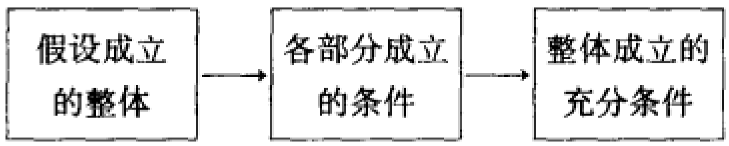
6. 分析法思路图示

综上所述，分析法这种抽象的思维方法，其思路可用图示的办法使其进一步明晰起来.

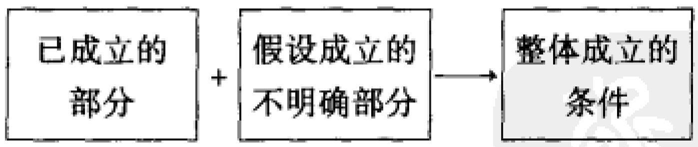
(1)元过程分析法



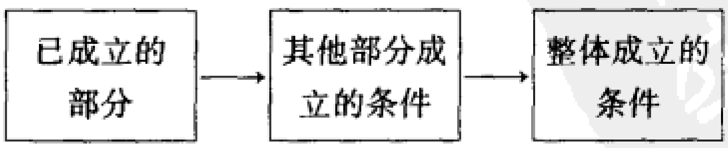
(2)追溯型分析法



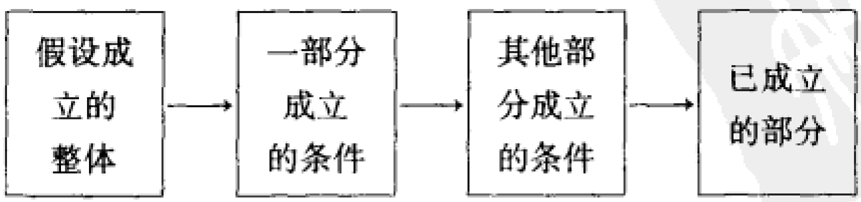
(3)构造型分析法



(4)前进型分析法



(5)混合型分析法



三、综合法

综合法也是人们用来认识事物本质的抽象思维的又一基本方法.

从方法论的角度讲,综合法是把研究对象各个部分、方面、因素、层次联系起来加以研究,从而在整体上把握事物的本质与规律的一种思维方法. 具体讲,就是从事物各部分、方面、因素、层次的特点、属性出发,导出它们之间的内在联系,然后加以概括与上升(即综合)去认识整体事物的本质规律.

数学中所说的综合法,也就是通常所说的由因索果的逻辑推理方法,应该理解为由已知条件和已证的真实判断出发(从事物各部分的特点、属性出发),经过一系列的中间推理,着力于寻找它们之间的内在联系,最后概括到要求证明的结论(获得整体的结果).

例(3-4-11)　若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,且 α、β、γ 均为正角,求证 $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

证明:我们所研究的对象,即整体事物应该是

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

与这个不等式有关的各种因素均可看成是其组成部分(包含题设条件).

先看题设,$\because\quad \alpha+\beta+\gamma=\pi$,$\therefore\quad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$.

又由该题的一部分,$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$,可令

$$y=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

结合题设部分,可作如下推演:

$$y = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \qquad ①$$

$$\because \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

设 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = x$，得 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ②

以上推演即找出了两部分的联系，然后做概括与上升的工作.

在②式中，$\because$ 二次项系数 $-\frac{1}{2}<0$，

$\therefore$ y 有极大值，即 $y_{max} = \frac{1}{8}\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ ③

③代入①得 $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}$

以上所述就是综合法. 当然，与分析法一样，在解决具体数学问题时，也应配合其他各种思维方法，许多情况下，分析与综合是同时使用的，这样才可能更好发挥其作用.

综合法思路如图 3 -4 -5.

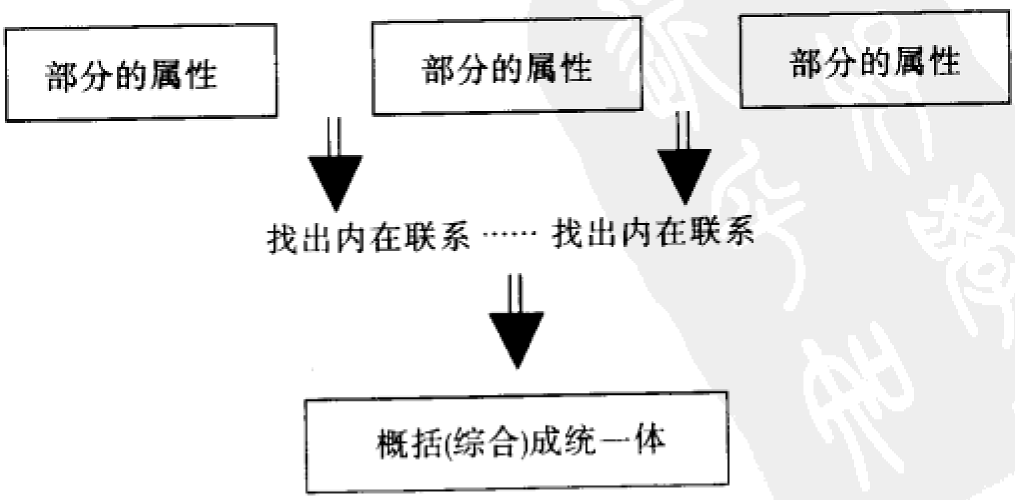


图 3 -4 -5

四、分析与综合之间的关系

数学家罗巴切夫斯基指出:“在数学研究中,人们遵循着两种方法,分析与综合.方程体现了分析的特殊性能,它可以作为判断的基础,并导致全部结论.综合,或者构造法,它的使用需要一些初始概念及与其直接有关的知识.分析的主要优点是,由方程出发总能直接达到预想的目的.综合不受任何一般步骤的约束.一门理论在还没有建立方程,没有变成关于数量的科学之前,通常有必要先以综合法研究问题.”(《科学家论方法》第二辑,内蒙古人民出版社,1985 年版,第 113 页)

由于分析法是由结论出发寻找它的充分条件.这就顾及题设,如例综合法则是由题设出发,每一步都是寻找它的必要条件.这就顾及结论,对于复杂的问题,综合法和分析法往往结合起来使用.

数学中分析与综合之间互相依存、又相互否定,分析是基础,综合是分析必然的发展.一个复杂的数学问题,总是先分析,在分析的基础上综合,在综合指导下再分析,此时分析中有综合,综合中有分析,分析不断转化为综合,综合继续发展,又转化为更高一级的分析,它们相互交替,相互补助,成为解决数学问题最有力的思维方法之一.

五、数学归纳法

在前面“归纳推理”中提到“不完全归纳法”和“完会归纳法”.“不完全归纳法”简单,但真实性不具有必然性;“完全归纳法”可得证真实性,但对于无限项的“完全列举”是不可能的.这时要用其他数学方法,如对于与自然数集有关的数学问题,可以借用“数学归纳法”.

数学归纳法是用来证明某些与自然数有关的数学命题的一种证明方法. 它是以皮亚诺自然数公理中的归纳公理为大前提，以证明过程中的第1°、2°步为小前提的三段论形式的演绎法. 归纳公理是：任意自然数集合，如果包含1，并且假设包含 a，也一定包含 a 的后继 $a'(=a+1)$，那么这个集合包含所有自然数.

数学归纳法是数学中重要的证明方法，它的特点在于它能将无限个对象的问题用有限的方法来解决，从而解决了完全归纳法所不能解决的问题. 我们重点研究数学归纳法的几种主要形式.

1. 第一数学归纳法（又称数学归纳法）

定理1 设 $P(n)$ 是一个关于自然数 n 的命题，如果

1°当 $n=1$ 时，$P(n)$ 成立；

2°假设 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时 $P(k)$ 成立，在此前提下推出 $n=k+1$ 时 $P(k+1)$ 也成立.

那么 $P(n)$ 对任意自然数 n 都成立.

证明：设 M 是使命题 $P(n)$ 成立的所有自然数集合. 由1°可知 $1\in M$；由2°知，在 M 包含 k 的假定下，M 一定也包含其后继 $k+1$，根据归纳法原理，知 M 包含所有自然数，即对一切自然数 n，$P(n)$ 都成立.

定理1给出的证明命题的方法就叫做第一数学归纳法，简称数学归纳法，它是数学归纳法的标准形式. 它有如下两个基本变形.

推论1 设 $P(n)$ 是关于自然数 $n(n\geqslant n_0, n_0\in\mathbf{N})$ 的命题. 如果 $P(n)$ 在 $n=n_0$ 时成立；

$P(k)(k\geqslant n_0)$ 成立的前提下，可以推出 $P(k+l)$ 成立.

那么 $P(n)$ 对于不小于 n_0 的自然数 n 都成立.

推论2 设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的命题，如果

$P(n)$ 在 $n=1,2,\cdots,l$ 时成立；

在 $P(k)(k\in\mathbf{N})$ 成立的假定下，可以推出 $P(k+l)$ 成立，那么

$P(n)$对一切自然数 n 都成立.

2. 第二数学归纳法

第二数学归纳法的理论依据是自然数的良序性,即最小数原理,它与归纳公理是等价的命题.

最小数原理:自然数的任一非空集合 M 中必有最小数.

证明:任取 $m \in M$. 记 $M' = \{1,2,\cdots,m\}$,若 $M' \cap M = \{m\}$,则 m 就是 M 中的最小数;若 $M' \cap M$ 是有限集合,因此 $M' \cap M$ 中必有一个最小数,此最小数显然也是 M 中的最小数.

定理 2 设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的命题,如果

$1°P(n)$ 在 $n = 1$ 时成立;

$2°$在 $P(n)(n \leqslant k, k \in \mathbf{N})$ 成立的假设下,可以推出 $P(k+1)$ 成立.

那么 $P(n)$ 对于所有自然数 n 都成立.

证明:设 $P(n)$ 不是对所有自然数都成立,那么使 $P(n)$ 不成立的自然数集 $M \neq \Phi$. 由最小数原理知,M 中必有最小数 k,$P(k)$ 不成立. 由条件 $1°$知 $k \neq 1$. 令 $k = k' + 1(k' \geqslant 1)$,因 $k' < k$,所以,对于 $1 \leqslant n \leqslant k'$的所有 n,$P(n)$ 成立. 又由条件 $2°$,有 $P(k')$ 也成立. 矛盾.

故 $P(n)$ 必对一切自然数成立.

定理 2 给出的证明方法叫做第二数学归纳法. 在具体应用时,若第 $2°$步是由相邻 r 个结果的正确性来推得 $P(k+1)$ 成立,则一般地在第 $1°$步要验证 $n = 1,2,\cdots,r$ 时成立.

3. 跳板数学归纳法

定理 3 设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的命题,如果

$1°$当 $n = 1, n = 2$ 时 $P(n)$ 成立;

$2°$设当 $n = k(k \in \mathbf{N})$ 时 $P(n)$ 成立,在此前提下推出 $n = k + 2$ 时 $P(n)$ 成立.

那么 $P(n)$ 对所有自然数都成立.

证明与定理 2 相仿.

定理 3 给出的证明方法叫做跳板归纳法. 它可以推广到由 $n=k$跳到 $n=k+1$ 的归纳法,只是在第 1°步要对 $n=1$、$n=2,\cdots,n$ 进行验证.

4. 反向数学归纳法

定理 4 设 $P(n)$是关于自然数 n 的命题,如果

1°$P(n)$对于无穷多个自然数 n 成立;

2°在 $P(k+1)$成立的假定下,可以推出 $P(k)$成立.

那么 $P(n)$对任意自然数 n 都成立.

证明:设 m 为任意自然数.

由条件 1°知有无穷多个自然数使 $P(n)$成立,故其中必能找到一自然数 l,$l\geqslant m+1$ 使 $P(l)$成立.

记 $Q(n)=P(l-n+1)$,则 $Q(1)=P(l-1+1)=P(l)$成立,即 $Q(n)$当 $n=1$ 时成立.

又据 2°,由 $P(k+1)$成立可以推出 $P(k)$成立,所以由 $P(l-k+1)$成立可以推出 $P(l-k)$成立,注意到

$P(l-k+1)=Q(k)$,

$P(l-k)=P(l-(k+1)+1)=Q(k+1)$.

于是,由 $Q(k)$成立可以推出 $Q(k+1)$成立.

因此,由第一数学归纳法,$Q(n)$对一切自然数 n 都成立. 特别地,取 $n=l-m+1$,有

$Q(l-m+1)=P(m)$成立. 由 m 的任意性,所以 $P(n)$对一切自然数 n 成立.

下面各举一例说明各种归纳法的应用.

例(3-4-12) 设数列$\{a_n\}$满足

(1)$a_1=\dfrac{1}{2}$;

(2)$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=n^2a_n(n\geqslant1)$.

求证：$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

证法一：当 $n = 1$ 时，命题显然成立.

设 $n = k$ 时有 $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$，则当 $n = k+1$ 时，

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2 - 1}\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{k(k+2)}(k^2 a_k)$$

$$= \frac{1}{k(k+2)} \cdot k^2 \cdot \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

所以，$n = k+1$ 时命题也成立.

由数学归纳法原理，对任意自然数 n 命题成立，即 $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

证法二：当 $n = 1$ 时，命题显然成立.

设 $n \leqslant k$ 时命题成立，即

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)},$$

$$a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)k}, \cdots, a_1 = \frac{1}{1 \times 2},$$

则当 $n = k+1$ 时，

$$a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)^2 - 1}\sum_{i=1}^{k} a_i$$

$$= \frac{1}{k(k+2)}\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{k(k+2)}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k(k+2)}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

所以,命题对 $n = k+1$ 时成立.

由第二数学归纳法原理,命题对任意自然数成立,即$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

例(3-4-13) 试证对任意自然数 n,方程 $x^2+y^2=z^n$ 都有正整数解.

证明:1°当 $n=1$ 时,对任意正整数 x、y,令 $z=x^2+y^2$,那么正整数 x、y、z 即是. 故命题成立.

当 $n=2$ 时,显然方程 $x^2+y^2=z^2$ 有一组正整数解是 $x=3$,$y=4$,$z=5$,故命题成立.

2°设 $n=k$ 时命题成立,即 $x^2+y^2=z^k$ 有正整数解(x_0,y_0,z_0). 则当 $n=k+2$ 时,由

$z_0^{k+2}=z_0^2\cdot z_0^k=(x_0^2+y_0^2)\cdot z_0^2=(x_0^2z_0^2+y_0^2z_0^2)=(x_0z_0)^2+(y_0z_0)^2$

知(x_0z_0,y_0z_0,z_0)是 $x^2+y^2=z^{k+2}$ 的正整数解. 所以,命题成立.

由跳板数学归纳法原理,命题对一切自然数成立.

参考文献

1. 钱佩玲,邵光华. 数学思想方法与中学数学. 北京:北京师范大学出版社,2001

2. 王申怀. 编写新教材中的一些感想. 数学通报,2004(7)

3. [美]波利亚. 怎样解题. 北京:科学出版社,1982

4. 解恩泽,赵树智. 数学思想方法纵横论. 北京:科学出版社,1987

5. 河南高师院校数学教育研究会. 数学方法论. 郑州:河南教育出版社,1996

6. [荷兰]弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学. 陈昌平等译. 上海:上海教育出版社,1995. 3

7. 高隆昌. 数学及其认识. 北京:高等教育出版社,2005

8. 王仲喜等. 数学思维与数学方法论. 北京:高等教育出版社,1989

9. 杨世明,王雪琴著. 数学发现的艺术. 青岛:青岛海洋大学出版社,2000

10. 周春荔,张景斌. 数学学科教育学. 北京:首都师范大学出版,2003

11. 解恩泽,徐本顺. 数学思想方法. 济南:山东教育出版社,1989

12. 林夏水. 数学哲学. 北京:商务印书馆,2003

13. 王子兴. 数学方法论问题解决的理论. 第二版. 长沙:中南大学出版社,2002

附录一　菲尔茨奖获得者及其贡献

阿尔福斯(L. V. Ahlfors **芬兰—美国**)(1936)　证明了邓若瓦猜想,发展了覆盖面理论

道格拉斯(J. Douglas **美国**)(1936)　解决普拉托极小曲面问题等

施瓦兹(L. schwartz **法国**)(1950)　创立了广义函数论

塞尔贝格(A. Selberg **挪威—美国**)(1950)　关于黎曼与函数零点分布问题的成就和对素数定理的初等证明,并在1986年获沃尔福奖

小平邦彦(K. Kunihiko **日本**)(1954)　推广了代数几何的一条中心定理——黎曼—巴赫定理,证明了狭义凯勒流形,得到小平邦彦消灭定理,并在1985年获沃尔福奖

塞尔(J. P. Serre **法国**)(1954)　对代数拓扑的杰出贡献

罗斯(K. F. Roth **英国—美国**)(1958)　在"数的几何"上对有理数逼近数的研究的卓越贡献

托姆(R. Thom)(1958)　在代数拓扑中创立了配边理论

赫尔曼德尔(L. V. Hormander **瑞典**)(1962)　得到了变系数线性偏微分方程解的存在性、惟一性、正则性结果. 此后在1988

年获沃尔福奖

米尔诺(J. W. Milnor **美国**)(1962)　对微分拓扑中七维球面上存在不同微分结构的证明;否定了庞加莱猜想,发展了复配,自旋配边等理化,1989 年获沃尔福奖

阿蒂亚(M. F. Atiyah **英国**)(1966)　与辛格(I. M. Singer 美国)一起给出"阿蒂亚—辛格指标定理";与盖尔兹得一起提出一个重要猜想,由并由此推广了黎曼—罗赫定理

格罗腾迪克(A. Grothendieck **法国**)(1966)　创立了现代代数几何理论体系、泛函分析、同调函数

斯梅尔(S. Smale **美国**)(1966)　解决了庞加莱猜想

贝克(A. Baker **英国**)(1970)　在丢番图方程上的一系列重要贡献

广中平佑(**日本**)(1970)　完满解决了在特征零的域上代数簇的奇点消解问题

诺维科夫(S. P. Novikov **前苏联**)(1970)　证明了组合流形的有理庞得里亚金利示性类的拓不扑变性

汤普森(J. G. Thompson **美国**)(1970)　证明了所有的非交换单群都具有偶数阶,1992 年又获沃尔福奖

芒福德(D. B. Mumford)　描述了阿贝尔簇的模簇

邦别里(E. Bombieri **意大利**)(1974)　改进了数论中的大筛法,解决了哥德巴赫猜想中的(1 +3)问题

费弗曼(C. Fefferman **美国**)(1978)　对偏微分方程、傅立叶分析、特别收敛发散性、奇异积分和哈代空间做出杰出的贡献

德利涅(P. Deligne **比利时**)(1978)　解决了联系素数与有限域中代数方程根的个数的韦依猜想

奎伦(D. Quillen **美国**)(1978)　完成高阶代数 K 理论的成果

马圭利斯(G. A. Margulis **前苏联**)(1978)　完全解决了李群的离散子群"塞尔贝格"猜想

孔涅(A. Connes **法国**)(1983)　创立的因子理论方面的杰出贡献

瑟斯顿(W. Tharston **美国**)(1983)　在几何拓扑学,特别在三维闭流形拓扑分类方面的贡献

丘成桐(YauSheng – Tung **美籍华人**)(1983)　证明了微分几何的卡拉比猜想,证明了广义相对论中的正质量猜想,以及高维闵科夫斯基问题

唐纳森(S. Donaldson **英国**)(1986)　在低维拓扑学中作出的贡献和证明四维流形存在怪异法结构

法尔廷斯(G. Faltings **德国**)(1986)　对代数几何学作出的贡献和对莫德尔猜想的证明

弗里德曼(M. Freedman **美国**)(1986)　对拓扑学作出的贡献,和证明四维流形拓扑的庞加莱猜想

德里弗里德(V. Drinfeld **前苏联**)(1990)　在朗兰兹纲领和量子群这两个领域的决定性突破和一大批研究的进展

琼斯(V. F. R. Jones **美国**)(1990)　将纽结理论引入算子代数产生的多项式不变量,揭示了拓扑几何与代数算子理论的关系

森重文(M. Shigefumi **日本**)(1990)　解决了代数几何领域三维代数簇的分类问题

布尔金(J. BourgA_in **比利时**)(1994)　在分析学的各个领域,以及近期的非线性微分方程和数学物理等的本质性贡献

利翁(P – L. lions **法国**)(1994)　发展了非线性偏微分方程

理论的黏性方法和变分方法以及在解玻尔兹曼方程方面的贡献

约科(JC. Yoccoz)(1994)　对一般的复动力系统的性状和分类得出深刻结果,对动力系统发展作出贡献

泽尔曼诺夫(E. Zelmanov **俄国**)(1994)　解决了群论中的一个难题——弱伯恩赛德问题

博彻兹(R. E. Borcherds **英国**)(1998)　在代数学和几何学中的贡献,特别证明了"魔群月光猜想"

高尔斯(W. T. Gowers **英国**)(1998)　在泛函分析和组合学领域的突出贡献

孔采维奇(M. Kontsevich **俄国**)(1998)　对数学物理、拓扑、代数几何的突出贡献,特别是他证明了几个重要猜想

麦克马伦(C. T. Tcmullen **美国**)(1998)　对双曲几何和复动力系统的杰出贡献

怀尔斯(A. Wiles **英国**)(1998)　证明了费马猜想,他是惟一获菲尔茨大奖超过 40 岁的人,1995 年又获沃尔福奖. 在数论和相关领域的杰出贡献,对某些猜想的重大推进

附录二　沃尔福奖获得者及其贡献

盖尔范德(俄罗斯)　1978 年获沃尔福奖,对泛函分析、群表示论的工作与数学及其应用的多个领域作出贡献

西格尔(德国 1896. 12. 31 ~ 1981. 4. 5)　1978 年获沃尔福奖,在数论、多复变函数论、天体力学方面作出贡献

勒雷(法国 1906. 11. 7 ~ 1998. 11. 10)　1979 年获沃尔福奖,对发展及应用拓扑方法,研究微分方作出贡献

韦依(法国 1906. 5. 6 ~ 1998. 8. 6)　1979 年获沃尔福奖,对数论、代数几何、微分几何、复几何、李群及不连续子群拓扑学作出贡献

柯尔莫哥洛夫(前苏联 1903. 4. 25 ~ 1987. 10. 20)　1980 年获沃尔福奖,对概率论调和分析,动力系论作出贡献

亨利·嘉当(法国)　1980 年获沃尔福奖,对复变函数、代数拓扑、同调代数作出贡献

阿尔福斯(苏兰—美国 19074. 18 ~ 1996. 10. 11)　1981 年获沃尔福奖,对复分析、几何函数作出贡献

扎里斯基(俄国—美国 1899. 4. 24 ~ 1986. 7. 4)　1981 年获沃尔福奖,对代数几何作出贡献

惠特尼(美国 1907.3.23～1989.5.10)　1982年获沃尔福奖,对代数拓扑、微分拓扑、微分几何作出贡献

克莱因(前苏联 1907.4.3～1989.10.17)　1982年获沃尔福奖,对泛函分析及其应用作出贡献

陈省身(美籍华人 1991.10.26～2004.12.3)　1984年获沃尔福奖,对整体微分几何作出重要贡献

埃尔德什(匈牙利 1913.3.26～1996.9.20)　1984年获沃尔福奖,对数论、组合论、概率论、集合论作出贡献

卢伊(美国 1904.10.20～1988.8.23)　1985年获沃尔福奖,对微分方程作出重要贡献

小平邦彦(日本 1915.3.16～1997.7.26)　1985年获沃尔福奖,对复流形、代数几何、拓扑学作出贡献

艾伦伯格(美国 1913.9.30～1998.1.30)　1986年获沃尔福奖,对代数拓扑、同调代数范畴论、自动机理论作出贡献

塞尔贝格(美国)　1987年获沃尔福奖,对分析学、偏微方程、应用数作出贡献

伊腾清(日本)　1987年获沃尔福奖,对概率论和随机分析作出贡献

希策布鲁赫(德国 1927.10.17)　1988年获沃尔福奖,对拓扑学、代数、微分几何、代数数论作出贡献

赫尔曼德尔(瑞典 1931.1.20～)　1988年获沃尔福奖,对伪微分算子和博立叶积分算子及偏微分方程作出贡献

考尔德伦(阿根廷—美国 1920.9.14～1998.4.16)　1989年获沃尔福奖,对奇异积分算子及其在偏微分方程上的应用的贡献

米尔诺(美国 1931.3.20～)　1989年获沃尔福奖,对微分拓

扑、微分几何、代数数论作出贡献

迪乔吉(意在利 1928.2.8～1996.10.25) 1990年获沃尔福奖,对偏微分方程,变分法作出贡献

汤普森(美国 1932.10.13～) 1992年获沃尔福奖,对有限群论和其他数学分支作出贡献

卡尔森(瑞典 1928.3.18～) 1992年获沃尔福奖,对博立叶分析、复分析、拟共形映射及动力系统作出贡献

格罗莫夫(俄罗斯 1945.12.13～) 1993年获沃尔福奖,对黎曼几何、辛几何、拓扑学、群论、偏微方程作出贡献

蒂茨(法国 1930.8.12～) 1993年获沃尔福奖,对群的代数结构,建筑理论作出贡献

莫泽(德国 1928.7.4～) 1995年获沃尔福奖,对数学分析、力学、几何学、非线性微分方程作出贡献

朗兰兹(美国加拿大 1936.10.6～) 1996年获沃尔福奖,对数论、非交换的调和分析、自守群论等作出贡献

怀尔斯(英国 1953.4.11～) 1996年获沃尔福奖,证明费马大定理

赛奈(俄罗斯 1935.9.21～) 1997年获沃尔福奖,对统计力学中严格方法、动力系统的遍历理论作出贡献

凯勒(美国 1923.7.31～) 1997年获沃尔福奖,对各种波动现象的数学理论及应用数学作出贡献

洛瓦兹(匈牙利 1948～) 1999年获沃尔福奖,对离散数学、理论计算机科学和组合优化领域作出贡献

斯坦(美国 1931.1.13～) 1999年获沃尔福奖,多维调和分析的创立者之一,建立多实变哈代理论,在李群表示论中发现了

所谓的孔泽—斯坦现象

博特(匈牙利 1923.9.24～)　2000 年获沃尔福奖,对拓扑学、李群理论、叶状结构和示性类、K 理论作出贡献

塞尔(法国 1926.9.25～)　2000 年获沃尔福奖,对代数拓扑、复几何、代数几何、数论、群论作出贡献